ESPRESSIONI

① **Se non ci sono parentesi bisogna calcolare solo la prima operazione e copiare tutto il resto**.

$2 + 9 - 7 + 1 =$
$= 11 - 7 + 1 =$
$= 4 + 1 = 5.$

$6 : 2 \cdot 5 =$
$= 3 \cdot 5 =$
$15.$

② **Una coppia di parentesi separa una espressione piccola interna da una grande che la contiene**. Le due espressioni non si devono mescolare, ma vanno calcolate in contemporanea. Quando si sostituisce l'espressione interna col suo risultato si tolgono le parentesi.

$(7 + 1 - 5) : [(2 + 7) : (2 + 1)] + 2 =$
$= (8 - 5) : [9 : 3] + 2 =$
$= 3 : 3 + 2 = 1 + 2 = 3.$

③ **Ogni serie di moltiplicazioni o divisioni è racchiusa fra una coppia di parentesi invisibili** che sono importanti come quelle visibili e funzionano allo stesso modo.

$5 \cdot 3 \cdot 2 - 8 \cdot 5 : 2 =$
$= (5 \cdot 3 \cdot 2) - (8 \cdot 5 : 2) = (15 \cdot 2) - (40 : 2) =$
$= 30 - 20 = 10.$

④ Quando i numeri o le parentesi sono preceduti da un segno + o – e seguiti da un segno · o : si esegue per prima la moltiplicazione o la divisione.

$11 + 2 \cdot (3 + 2) = 11 + 2 \cdot 5 = 11 + 10 = 21.$
$11 - 2 \cdot (3 + 2) = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 10 = 1.$
$11 + 10 : (5 - 3) = 11 + 10 : 2 = 11 + 5 = 16.$
$11 - 10 : (5 - 3) = 11 - 10 : 2 = 11 - 5 = 6.$

$10 + 5 \cdot [(7 + 11) : 9] =$
$= 10 + 5 \cdot [18 : 9] =$
$= 10 + 5 \cdot 2 =$
$= 10 + 10 = 20.$

False credenze. Non è sempre vero che le moltiplicazioni vanno eseguite prima delle addizioni. Risolvi questa: $10 + 5 - 21 : 3 \cdot 2.$
L'addizione può essere calcolata immediatamente ma la moltiplicazione assolutamente no.
Non è sempre vero che bisogna prima calcolare le tonde, poi le quadre, poi le graffe. Risolvi questa:
$(8 - 2 + 10 - 1 + 3 - 7 - 1) : \{[(2 + 6) : 1 + 2] : 2\}$
La parte di sinistra, fra parentesi tonde, richiede sei passaggi per essere risolta. La parte di destra, fra parentesi graffe, richiede solo quattro passaggi e farai bene a risolverla in contemporanea.

Proprietà dell'addizione:
- commutativa $3 + 22 = 22 + 3.$
- associativa $18 + 55 + 45 = 18 + (55 + 45) = 18 + 100 = 118.$

Proprietà della sottrazione:
- invariantiva $113 - 99 = (113 + 1) - (99 + 1) = 114 - 100 = 14.$

Proprietà della moltiplicazione:
- commutativa $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2.$
- associativa $17 \cdot 25 \cdot 4 = 17 \cdot (25 \cdot 4) = 17 \cdot 100 = 1700.$
- distributiva $3 \cdot 199 = 3 \cdot (200 - 1) = 3 \cdot 200 - 3 \cdot 1 = 600 - 3 = 597.$

Proprietà della divisione:
- invariantiva $650 : 25 = (650 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 2600 : 100 = 26.$
  $7{,}37 : 1{,}1 = (7{,}37 \cdot 10) : (1{,}1 \cdot 10) = 73{,}7 : 11 = 6{,}7.$
  $5.600 : 700 = (5.600 : 100) : (700 : 100) = 56 : 7 = 8.$
- distributiva $196 : 4 = (200 - 4) : 4 = 200 : 4 - 4 : 4 = 50 - 1 = 49.$

Definizione di potenza: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
Casi particolari: $7^0 = 1$. $7^1 = 7$. $1^8 = 1$. $0^7 = 0$. 0^0 non è definita.
Potenze di 10: il numero di zeri è uguale all’esponente. $10^3 = 1.000$ $10^6 = 1.000.000$

PROPRIETA’ DELLE POTENZE
- moltiplicazione fra potenze con la stessa base $2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$.
- divisione fra potenze con la stessa base $2^7 : 2^3 = 2^{7-3} = 2^4$.
- moltiplicazione fra potenze con lo stesso esponente $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7 = 10.000.000$
- divisione fra potenze con lo stesso esponente $14^3 : 7^3 = (14 : 7)^3 = 2^3 = 8$.
- proprietà distributiva $300^2 = (3 \cdot 100)^2 = 3^2 \cdot 100^2 = 9 \cdot 10.000 = 90.000$.
- potenza di potenza $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$. $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$.

DIVISIBILITA’

I divisori di 6 sono 1, 2, 3 e 6. I divisori di un numero intero sono almeno due, iniziano con 1 e terminano con il numero stesso, rispetto al quale sono più piccoli o al massimo uguali.
I multipli di 6 sono 6, 12, 18, 24… I multipli di un numero sono infiniti. Sono più grandi del numero stesso o come minimo uguali.
Per vedere se due numeri sono uno il multiplo dell’altro si può dividere il più grande per il più piccolo. Il resto deve essere zero. Questo metodo però è lento. Esistono dei metodi più rapidi chiamati **criteri di divisibilità**. Si possono imparare i criteri per i divisori 2, 3, 5, 7, 9, 10 e 11.
Si chiamano **numeri primi** quelli che si possono dividere solo per 1 e per se stessi. Es.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29... Quelli che hanno più di due divisori si dicono **numeri composti**. Es.: 4, 6, 9, 14, 15... Zero ed uno sono casi a parte perché non sono né primi né composti.
Teorema Fondamentale dell’Aritmetica: la scomposizione in fattori primi di un numero è unica.
A cosa serve la scomposizione in fattori primi? A tante cose; per fare un esempio, ad individuare tutti i divisori di un numero qualsiasi.
Criterio generale di divisibilità: i fattori del numero più piccolo devono essere compresi anche nel numero più grande, con esponente pari o maggiore. Ad es. la scomposizione in fattori di 15 è $3 \cdot 5$. Allora se un numero è divisibile sia per 3 che per 5 deve essere divisibile anche per 15. Ad esempio, 255 e 285 sono divisibili per 15, mentre 245 e 295 non lo sono perché non sono divisibili per 3.

M.C.D. = **Massimo Comun Divisore** di due o più numeri interi. Esiste sempre.
Es. M.C.D.(42, 56, 70) = 14. Infatti 14 è il più grande numero che divida sia 42 che 56 che 70.
Esistono molti metodi per calcolare il M.C.D. Come minimo bisogna conoscere i seguenti tre.

① M.C.D. = prodotto dei fattori primi comuni, presi con l’esponente più basso.
② Se due numeri non hanno fattori in comune si dicono primi fra di loro. Es.: 8 e 15.
In questo caso M.C.D. = 1.
③ Se due numeri sono uno il multiplo dell’altro, quello più piccolo è anche il M.C.D.

m.c.m. = **minimo comune multiplo** di due o più numeri interi. Esiste sempre.
Es. m.c.m.(18, 24, 36) = 72 perché 72 è il più piccolo numero che sia multiplo di 18, di 24 e 36.
Esistono molti metodi per calcolare il m.c.m. Come minimo bisogna conoscere i seguenti tre.

① m.c.m. = prodotto dei fattori primi comuni e non comuni, presi con l’esponente più alto.
② Se due numeri sono primi fra loro, allora il m.c.m. è il loro prodotto.
③ Se due numeri sono uno il multiplo dell’altro, allora il più grande dei due è il m.c.m.

☞ M.C.D. e m.c.m. godono della proprietà associativa e farai bene a sfruttarla sempre.
Nel nostro caso, ad esempio, m.c.m.(18, 24, 36) = m.c.m.(24, 36) perché m.c.m.(18, 36) = 36.

RIDURRE LE FRAZIONI AI MINIMI TERMINI

Una frazione è ridotta ai minimi termini quando numeratore e denominatore non hanno fattori in comune. Esistono tre metodi per ridurre una frazione ai minimi termini.

① Si dividono entrambi i termini per il loro M.C.D. $\frac{75}{360}=\frac{75:15}{360:15}=\frac{5}{24}$

② Oppure si eseguono semplificazioni successive. $\frac{75}{360}=\frac{15}{72}=\frac{5}{24}$

③ Oppure si scompongono in fattori primi entrambi i termini e poi si eliminano i fattori che compaiono sia al numeratore che al denominatore. Se compaiono con esponente diverso, si esegue la differenza degli esponenti. $\frac{825}{3960}=\frac{3\cdot 5^2\cdot \cancel{11}}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot \cancel{11}}=\frac{5^{2-1}}{2^3\cdot 3^{2-1}}=\frac{5}{8\cdot 3}=\frac{5}{24}$

RIDUZIONE AL MINIMO COMUN DENOMINATORE (m.c.d.)

Si calcola il m.c.m. dei denominatori. Per ogni frazione, si divide questo m.c.m. per il denominatore e si moltiplica il risultato per il numeratore.

CONFRONTO FRA FRAZIONI

Se i denominatori sono uguali, la frazione maggiore è quella col numeratore più grande.
Se i numeratori sono uguali, la frazione maggiore è quella col denominatore più piccolo.
Si possono ridurre le frazioni al minimo comun denominatore. Oppure si trasformano in numeri decimali. Oppure si rappresentano graficamente. Oppure si moltiplicano in croce.

ESPRESSIONI CON LE FRAZIONI

① Siamo liberi di sostituire la linea di frazione col simbolo di divisione e viceversa, tutte le volte che possa farci comodo. $\frac{12}{3}=12:3=4$. Invece: $5:12=\frac{5}{12}$

② Prima e dopo ogni passaggio ridurre le frazioni ai minimi termini.

$$\frac{12}{15}+\frac{2}{10}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1$$

③ Se c'è un numero intero, riscriverlo sotto forma di frazione con denominatore 1.

$$2-\frac{2}{3}=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}=\dots$$

④ Addizione e sottrazione si eseguono solo quando i denominatori sono uguali.

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$$

⑤ Moltiplicazione: si moltiplicano i numeratori fra di loro ed i denominatori fra di loro.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

⑥ Solo all'interno di una moltiplicazione si può semplificare il numeratore di una frazione col denominatore di un'altra: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ altro esempio: $\frac{9}{5}\cdot\frac{25}{28}\cdot\frac{7}{15}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$

⑦ Divisione: si ricopia la prima frazione, al posto del segno di divisione si mette quello di moltiplicazione e la seconda frazione si inverte. $\frac{4}{5}:\frac{2}{15}=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}=\frac{6}{1}=6$

⑧ Potenza: $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$ abbiamo applicato la proprietà distributiva della potenza.