NUMERI RELATIVI

Un numero relativo si compone di due parti: il segno algebrico (che può essere solo + o –) ed il valore assoluto, detto anche modulo, che può essere un intero, un decimale o una frazione.
Un numero si dice positivo (≥ 0) se il segno è +, si dice negativo (< 0) se il segno è –.
Due numeri si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno algebrico. Es.: – 7 e – 9. Si dicono **discordi** se hanno segno opposto. Es.: – 11 e + 6. Si dicono inversi se il loro prodotto è +1.

Estrazione del valore assoluto: $|-8| = 8$. $|+5{,}4| = 5{,}4$.
Opposto di un numero relativo: $-(+4) = -4$. $-(-4) = +4$.
Inverso di un numero relativo: $(+4)^{-1} = 0{,}25$. $(0{,}25)^{-1} = +4$. $(-5)^{-1} = -0{,}2$.

Addizione
addendi concordi → Segno: lo stesso degli addendi. Valore assoluto: somma dei valori assoluti.

$$(-4) + (-3) = (-7)$$

addendi discordi → Segno: lo stesso dell' addendo col valore assoluto maggiore. Valore assoluto: differenza dei valori assoluti. $(-4) + (+3) = (-1)$. $(-4) + (+9) = (+5)$.

Sottrazione si riscrive come addizione del sottraendo cambiato di segno.
$(+2) - (-3) = (+2) + (+3) = 5$. $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$.

Moltiplicazione fattori concordi → prodotto positivo $(-2) \cdot (-3) = (+6)$
fattori discordi → prodotto negativo $(+2) \cdot (-3) = (-6)$

Oppure si contano i segni meno:
Conto pari → prodotto positivo $(-2) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-5) = +30$.
Conto dispari → prodotto negativo $(-2) \cdot (-3) \cdot (+1) \cdot (-5) = -30$.

Divisione le regole dei segni sono le stesse della moltiplicazione $(+78) : (-6) = (-13)$

Potenze sono negative solo quando la base è negativa e l'esponente dispari
$(-5)^0 = +1$. $(-5)^1 = -5$. $(-5)^2 = +25$. $(-5)^3 = -125$. $(-5)^4 = +625$. $(-5)^5 = -3.125$.

Radici di numeri negativi possibili se l'indice è dispari $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\sqrt{-25}$ = impossibile

ESPRESSIONI LETTERALI

Occorre fare attenzione che le lettere non possono sempre assumere qualsiasi valore. Due esempi:
l'espressione $\frac{2}{5-m}$ non ammette il valore m = 5 perché il denominatore non può essere 0;
l'espressione $\sqrt{b-3}$ richiede che sia $b \geq 3$ perché non si può eseguire la radice quadrata di valori negativi.
Quando si sostituisce una lettera con un valore numerico é buona idea quella di proteggere il numero fra parentesi. Ad es., se sappiamo che a = – 5 ed x = – 3 allora:

$$2ax^2 = 2 \cdot (-5) \cdot (-3)^2 = -10 \cdot (+9) = -90.$$

Si chiama **Monomio** un'espressione che contiene solo moltiplicazioni. Un monomio inizia con un numero relativo detto **coefficiente** (che quindi comprende anche il segno algebrico) seguito dalla parte letterale, quest'ultima composta da alcune lettere (anche nessuna) disposte in ordine alfabetico. Solo le lettere portano un esponente, intero non negativo (anche zero). La somma degli esponenti è detta **grado** del monomio. Due monomi si dicono **simili** se le parti letterali sono identiche. L'<u>addizione</u> algebrica è possibile solo fra monomi simili, altrimenti si lascia l'espressione così com'è. L'addizione fra monomi non simili si chiama **polinomio**.

$$-3\,ax + b + 5\,ax - y^2 - 2\,b = 2\,ax - b - y^2$$

Il grado del polinomio è uguale al grado più elevato dei suoi monomi.
La <u>moltiplicazione fra monomi</u> è sempre possibile: $5\,ax \cdot 3\,bx = 15\,abx^2$
La divisione é possibile solo quando il divisore contiene tutte le lettere del dividendo con un esponente uguale o inferiore: $-28\,a^2b^3c : (-4\,a^2b) = +7\,b^2c$
<u>Moltiplicazione fra polinomi</u>: si applica la proprietà distributiva.

$$(a + b) \cdot (x + y + z) = ax + bx + ay + by + az + bz.$$

Prodotti Notevoli

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$ $\qquad$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3$

EQUAZIONI

Una uguaglianza si dice **identità** se è sempre vera: $10 = 5 + 5$. $\qquad$ $x \cdot x = x^2$.
Si dice **equazione** se è vera solo in pochi casi. $\qquad$ $x^2 = 25$ è vera solo quando $x = 5$ o $x = -5$.
La lettera che può assumere solo pochi valori, in questo caso la x, si chiama **incognita**. Una equazione può possedere più di una incognita. Di solito si usano le lettere x, y e z.
I valori dell'incognita che rendono vera l'equazione si chiamano **soluzioni** dell'equazione. Ognuna delle due espressioni, separate dal segno =, si chiama **membro**. Ogni monomio che vi compare, anche se privo di lettere, si chiama **termine**. Il massimo esponente con cui compare l'incognita è il **grado** dell'equazione. Due equazioni si dicono equivalenti se possiedono le stesse soluzioni.

1° Principio di equivalenza:
"Aggiungendo o sottraendo la stessa quantità ad entrambi i membri si ottiene una equazione equivalente."

→ Se un monomio appare in entrambi i membri si può cancellare.

→ **Trasporto**: se si sposta un monomio da un membro all'altro bisogna cambiarne il segno.

2° Principio di equivalenza:
"Moltiplicando o dividendo entrambi i membri per la stessa quantità, <u>diversa da zero</u>, si ottiene una equazione equivalente."

→ Possiamo cambiare il segno a tutti i termini di una equazione.

→ Se tutti i termini sono frazionari ed hanno lo stesso denominatore possiamo scrivere una equazione equivalente con i soli numeratori.

→ Non possiamo moltiplicare entrambi i membri per una lettera, perché quella lettera potrebbe corrispondere al numero zero. Possiamo farlo solo se siamo certissimi che non vale zero.

Se entrambi i membri sono monomi possiamo spostare il coefficiente di un monomio al denominatore dell'altro. $\qquad$ $5x = 3 \rightarrow \qquad x = \frac{3}{5}$

L'equazione di primo grado ad una incognita $5x = 3$ si dice: "ridotta in forma normale" perché contiene solo due termini: uno con l'incognita e l'altro senza. Quest'ultimo si chiama **termine noto**. Il numero che moltiplica l'incognita si chiama **coefficiente** dell'equazione.

Come **RISOLVERE** una equazione di 1° grado ad una incognita:
- semplificare le due espressioni e far sparire tutte le parentesi;
- se ci sono frazioni, ridurle tutte al m.c.d., che poi si cancella;
- trasportare i termini con la x a sinistra e quelli senza x a destra, applicando la regola del trasporto;
- spostare il coefficiente della x al denominatore del secondo membro.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -2x - \frac{1}{3}$$
$$\frac{3x+9}{6} = \frac{-12x-2}{6}$$
$$3x + 9 = -12x - 2$$
$$3x + 12x = -2 - 9$$
$$15x = -11$$

la soluzione è $\qquad x = -\frac{11}{15}$

Il metodo non si può applicare se il coefficiente di x è zero. Ove ciò accada, si distinguono due casi:
1) Anche il termine noto è zero. L'equazione è **indeterminata**. $\qquad 0 \cdot x = 0 \qquad$ (identità)
2) Il termine noto è diverso da zero. L'equazione è **impossibile**. $\qquad 0 \cdot x = 4 \qquad$ (non ci sono soluzioni)

GEOMETRIA ANALITICA

Punto medio di un segmento nel piano cartesiano: la sua ascissa è la semisomma delle ascisse degli estremi; la sua ordinata la semisomma delle ordinate degli estremi.
Distanza fra due punti nel piano cartesiano: radice della somma fra quadrato della differenza delle ascisse e quadrato della differenza delle ordinate (teorema di Pitagora).

Nel piano cartesiano, ad ogni equazione nelle variabili x e y corrisponde una curva.
Condizione di appartenenza di un punto ad una curva: si sotituiscono, nell'equazione della curva, tutte le x con l'ascissa del punto e tutte le y con l'ordinata. Se si ottiene un'identità, allora e solo allora il punto appartiene alla curva.

Per disegnare la curva di una equazione data, di solito si riscrive l'equazione nella forma y = f(x).
Intersezione con l'asse x. Nei punti in cui una curva taglia l'asse x la sua ordinata vale zero. Pertanto l'equazione y = f(x) si semplifica in f(x) = 0 che è una equazione ad una sola incognita. Le soluzioni di tale equazione, se esistono, forniscono i diversi valori dell'ascissa per ogni punto in cui la curva passa per l'asse x.

Equazione della **retta** nel piano cartesiano: $y = m x + q$
q = intercetta (ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y)
m = pendenza. Ad esempio, se $m = \frac{2}{3}$ allora la retta si sposta di 2 unità verso l'alto quando si sposta di 3 unità verso destra. Se invece $m = -\frac{3}{4}$ allora la retta si sposta di 3 unità verso il basso quando si sposta di 4 unità verso destra.
Una retta orizzontale ha equazione della forma y = q perché la sua pendenza è nulla (m = 0).
Una retta verticale ha equazione della forma x = k perché coincide con l'insieme dei punti del piano che hanno ascissa k. Due esempi: x = –5 è una retta verticale; y = ½ è orizzontale.

Condizione di **parallelismo** fra due rette: devono avere la stessa pendenza m.
Condizione di **perpendicolarità**: se m è la pendenza di una retta, la pendenza dell'altra è $-\frac{1}{m}$.
Condizione di **passaggio dal punto** $P(x_P, y_P)$: $y_P = x_P m + q$ Vediamo un caso pratico.
Facciamo per esempio che la retta passi dal punto A(– 2, 9), allora otteniamo **9 = – 2 m + q**.
Abbiamo bisogno di un altro dato per calcolare sia m che q. Supponiamo che la retta debba essere perpendicolare ad un'altra retta di equazione y = 0,25 x + 3, pertanto calcoliamo $m = -0{,}25^{-1} = -4$.
Sostituendo questo valore al posto del simbolo m nella uguaglianza in grassetto otteniamo
9 = – 2 · (– 4) + q che si semplifica in q = 1. Nell'equazione generica y = m x + q sostituiamo m con – 4 e q con 1. L'equazione della nostra retta sarà y = – 4 x + 1.

Intersezione fra due curve y = f(x) e y = g(x).
Nei punti di intersezione le due curve hanno la stessa ordinata y, pertanto vale l'uguaglianza:
f(x) = g(x) che è una equazione in una sola incognita. Le soluzioni di tale equazione, se esistono, forniscono le ascisse degli eventuali punti di intersezione. Per ottenere le ordinate, possiamo usare indifferentemente una delle due formule: $y_P = f(x_P)$ oppure $y_P = g(x_P)$.
Poniamo, per esempio, di avere due rette di equazioni: y = – (3/2) x + 5 e y = – (1/2) x + 1.
Uguagliamo i due secondi membri ed otteniamo – (3/2) x + 5 = – (1/2) x + 1.
La soluzione di tale equazione è x = 4. Questa è l'ascissa x_P del punto P di intersezione cercato.
Sostituiamo x con 4 nell'equazione della seconda retta che diventa $y_P = -(1/2) \cdot 4 + 1 = -1$.
Questa è l'ordinata del punto P.

CONICHE

Circonferenza: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ con centro $(x_c; y_c)$ e raggio r

Ellisse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$; centro in (0; 0)

Parabola: $y = ax^2 + bx + c$

Iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Iperbole equilatera: $y = \frac{k}{x}$

ALTRE CURVE

Esponenziale crescente: $y = a^x$ con $a > 0$
Esponenziale decrescente: $y = a^{-x}$

STATISTICA

Indicatori: **media** = $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$; **mediana** = dato centrale; **moda** = dato più frequente.
Frequenza assoluta = numero di volte in cui si è verificato un evento.
Frequenza relativa = Frequenza assoluta : numero di casi osservati.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Probabilità dell'evento E: $p(E) = \frac{\text{n . casi favorevoli}}{\text{n . casi possibili}}$

Eventi **compatibili** sono quelli che possono, a volte, verificarsi in contemporanea. **Incompatibili** quelli che non possono mai verificarsi assieme.

Probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi incompatibili: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$
Se invece gli eventi sono compatibili: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

Due fenomeni si dicono **indipendenti** quando il risultato di ciascuno di essi non dipende dal risultato dell'altro.
Probabilità **composta** che si verifichino entrambi gli eventi E_1 ed E_2 …
… se sono indipendenti: $p = p(E_1) \cdot p(E_2)$
… se non lo sono: $p = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1)$