Giuseppe Balacco

LEZIONI DI MATEMATICA

per la terza media

Il fine della nassa è il pesce:
preso il pesce metti da parte la nassa.
Il fine del calappio è la lepre:
presa la lepre metti da parte il calappio.
Il fine delle parole è l'idea:
afferrata l'idea metti da parte le parole.
Chuang-Tzu, XXVI, 21 1

24 settembre 2017
http://balacco.info

COME USARE QUESTO FASCICOLO

Per prima cosa devi seguire con la massima attenzione le mie lezioni, perché il fascicolo serve per ripeterle a casa.
Ho volutamente usato meno parole possibile. Mi aspetto che tu legga lentamente e mediti ogni frase fino a quando diventi chiara. Alla fine della pagina, prova a ripetere: a voce le definizioni e le spiegazioni; per iscritto figure, formule e calcoli.
Ogni capitolo richiede la perfetta conoscenza dei capitoli che lo precedono. Una persona normale non riesce a ricordare tutto con una sola lettura. Devi quindi ristudiare i vecchi argomenti a distanze di settimane e di mesi, forse anche di anni.
Ho inserito alcuni problemi e alcuni argomenti che potrebbero essere troppo difficili per te, specie ad una prima lettura. Se hai seguito le lezioni riuscirai a riconoscerli. Prova a risolverli, se ti senti abbastanza sereno e motivato; altrimenti saltali pure.
Questo fascicolo non è un libro di testo né un suo sostituto. In linea di massima, devi usare il libro per imparare nuovi argomenti e per esercitarti, queste pagine per ripassare.
La matematica che viene proposta alla tua età la si impara solo con la pratica, ma qui troverai principalmente teoria. Le due cose si aiutano a vicenda, perché nessuna delle due si può comprendere facendo a meno dell'altra. Io mi auguro che tu rimanga sempre curioso come un bambino, come quei bambini che vogliono conoscere il perché di ogni cosa. Qui troverai tante risposte ai tuoi perché, risposte che poche volte si trovano nei libri. Se, leggendole, dirai: "Ci potevo arrivare anche da solo", significa che io avrò raggiunto il mio scopo.
Preparati a sudare e ad affrontare sconfitte e fallimenti. Imparare la matematica è un'impresa e tu ne sarai l'artefice. Se lasci gli sforzi a qualcun altro, sarà lui ad imparare, non tu. Non ti arrendere ed i risultati arriveranno. La matematica è un gioco in cui tutti i giocatori vincono e nessuno perde. Aiuta i tuoi compagni di studi e confrontati con loro. Ne trarrai un beneficio costante.

RICAPITOLAZIONE

In questo terzo anno affronteremo nuovi problemi e li risolveremo usando i metodi ed i concetti che abbiamo imparato negli anni precedenti. Ti sarà utile studiare o rileggere i primi due fascicoli. Allenati nei calcoli mentali con i seguenti giochi:
https://www.geogebra.org/m/zhMxFhG7
https://www.geogebra.org/m/GCx2t7GM
https://www.geogebra.org/m/FXXFvqbt
https://www.geogebra.org/m/hYa7fQnR
L'elenco completo lo trovi alla pagina
http://balacco.info/creazioni.html

NUMERI RELATIVI

Spesso abbiamo menzionato i numeri negativi. Ci sono tanti buoni motivi per usarli: rendono possibili le sottrazioni anche quando il sottraendo è maggiore del minuendo; permettono di registrare temperature molto basse; vengono usati per penalizzare le squadre sportive che hanno commesso un illecito; consentono di trattare assieme aumenti e diminuzioni, entrate e uscite.
L'insieme dei numeri relativi comprende sia quelli positivi che quelli negativi. Un numero relativo è composto da due parti: un **segno**, che può essere + o –, ed un **valore assoluto**, che è un numero reale positivo. Il segno + di solito si sottintende. L'estrazione del valore assoluto è un'operazione ed il suo simbolo sono due tratti verticali.

$|-4| = 4$ $\qquad$ $|+7| = 7$.

L'operazione è molto semplice: basta eliminare il segno.

Due numeri si dicono: **concordi** se hanno lo stesso segno; **discordi** se hanno segno diverso; **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso.

D'ora in poi useremo i numeri relativi. Gli insiemi dei numeri sono:

$\mathbb{N}$ numeri Naturali: 0; 1; 2; 3…

$\mathbb{Q}$ numeri Razionali, ad es. –1,5; $-0,\overline{3}$; ½ …

L'insieme $\mathbb{Q}$ comprende $\mathbb{N}$

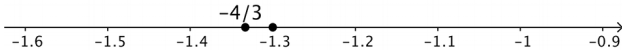
$\mathbb{R}$ numeri Reali, ad es. $\sqrt{2}$; π; – π …

L'insieme $\mathbb{R}$ comprende $\mathbb{Q}$

CONFRONTO

Stabilire, di due numeri relativi, quale sia il maggiore e quale il minore non è difficile. Se hai dei dubbi ricorri alla retta dei numeri.

Confrontiamo –1,3 e –4/3. Per disegnare un numero, per prima cosa chiediti quali sono gli interi più vicini. –1,3 si trova fra –1 e –2. Per essere più precisi, dista di 3 decimi da –1. Esaminiamo ora l'altro numero. Anche –4/3 si trova fra –1 e –2. Per essere più precisi, dista di 1/3 da –1.



Il numero maggiore è quello più a destra.

Puoi pertanto scrivere: $-\frac{4}{3} < -1,3$.

Il confronto è facilissimo fra due numeri discordi: qualsiasi numero positivo è maggiore di qualsiasi numero negativo.

OPERAZIONI

I risultati delle operazioni fra numeri relativi sono in parte frutto delle regole che decidiamo di adottare. Ci conviene desiderare due cose:
1) I risultati delle operazioni fra numeri positivi devono rimanere quelli cui siamo abituati.
2) Le operazioni devono continuare a godere delle stesse proprietà.
Le nuove regole saranno la conseguenza di questi due presupposti; non saranno delle leggi naturali.

ADDIZIONE

Disegna sulla retta dei numeri l'addizione:

$$2 + 5 = 7$$

Aggiungere 5 ad un numero significa spostarsi di cinque unità verso destra. In base a questa regola possiamo dire che:

$$-6 + 5 = -1$$

Applicando la proprietà commutativa:

$$(+5) + (-6) = (-1)$$

Disegna anche questa operazione sulla retta dei numeri. Noterai che aggiungere –6 significa spostarsi di sei unità verso sinistra.
Aggiungere un numero positivo significa spostarsi verso destra; aggiungere un numero negativo significa spostarsi verso sinistra.
La somma di due numeri negativi è un numero ancor più negativo.
Interpretiamo l'espressione (–2) + (–1) = –3. Essa potrebbe corrispondere al seguente problema: stamane due alunni erano assenti all'appello; un altro è uscito alle 10 per motivi di salute; alle 11 quanti alunni in più ci sono rispetto alla classe completa?
Il problema potrebbe anche essere: hai un debito con Aldo di €2 ed uno con Beatrice di €1. Quanti soldi hai?

REGOLE VELOCI

Addendi Concordi

(+2) + (+5) = (+7)
(–2) + (–5) = (–7)
(+9) + (+10) = (+19)
(–9) + (–10) = (–19)

La somma ha lo stesso segno degli addendi. Il valore assoluto della somma è la somma dei valori assoluti degli addendi.

Addendi Discordi

(+2) + (–5) = (–3)
(–2) + (+5) = (+3)
(+10) + (–9) = (+1)
(–10) + (+9) = (–1)

La somma ha lo stesso segno dell' addendo con valore assoluto più grande. Il valore assoluto della somma è la differenza dei valori assoluti degli addendi.

SOMMA ALGEBRICA

L'addizione fra 5 e –2 può essere scritta racchiudendo i numeri fra parentesi per mettere in chiaro che il segno – fa parte del numero –2 e che non è un segno di operazione.

(+5) + (–2) = (+3)

Di solito, però, si nascondono sia le parentesi che il segno di addizione. Se poi un espressione inizia col segno + si nasconde anche quello.

5 – 2 = 3

Come facciamo a capire se questa è la stessa addizione di prima oppure la sottrazione fra 5 e +2 ? Per fortuna non c'è bisogno di capirlo, perché entrambe le operazioni conducono allo stesso risultato.

È anzi preferibile sostituire tutte le sottrazioni con delle addizioni. D'ora in poi, anziché sottrarre +2 preferiremo aggiungere –2. Il motivo è presto detto: l'addizione gode delle comodissime proprietà **commutativa** ed **associativa**. Per ricordarci che d'ora innanzi un'addizione può anche essere una sottrazione reinterpretata parleremo di "somma algebrica".

SOTTRAZIONE

Abbiamo detto che (+5) + (–6) = (–1).
Possiamo rappresentarlo così:

$$+5 \xrightarrow{+(-6)} -1$$

La freccia mostra che partendo da +5 ed aggiungendo –6 giungiamo a –1. In matematica si può tornare indietro se esiste l'operazione inversa. In questo caso si tratta della sottrazione:

$$-1 \xrightarrow{-(-6)} +5$$

Scritto nella forma tradizionale: –1 – (–6) = 5.
Quando sottraiamo un numero negativo ci spostiamo lungo la retta dei numeri verso destra. È come se calcolassimo l'addizione –1 + 6 = 5.
Sostituiremo la sottrazione di un numero relativo con l'addizione del suo opposto. I due segni meno consecutivi davanti al 6 sono una doppia negazione ed equivalgono ad una affermazione. Dire: "Non è falso" è come dire: "È vero".

SOMME ESTESE

Quando un'espressione presenta numerose addizioni e sottrazioni, conviene prima di tutto riscriverla come addizione algebrica e poi applicare le proprietà commutativa e associativa per facilitare i calcoli ove possibile.

3 – 4 + 7 – 3 + 4 = 3 – 3 + 7 + 4 – 4 =
= (3 – 3) + 7 + (4 – 4) = 0 + 7 + 0 = 7.

Altre volte conviene raggruppare i numeri positivi da una parte e quelli negativi dall'altra.

7 – 11 – 4 + 3 + 9 – 5 + 13 =
= 7 + 3 + 9 + 13 – 11 – 4 – 5 =
= (7 + 3 + 9 + 13) + (– 11 – 4 – 5) =
= 32 – 20 = 12.

Alcuni di questi passaggi puoi anche farli a mente, ma questo renderebbe più arduo la rilettura e la correzione. Se esegui tutti i passaggi per iscritto le tue espressioni saranno facile da leggere e da correggere. Perderai qualche secondo in più per scriverle ma ne risparmierai molti di più quando le rileggerai.

Se una parentesi è preceduta dal segno meno puoi togliere le parentesi e cambiare tutti i segni all'interno.

8 – (1 +4 –3 +2 –7 –5) = 8 –1 –4 +3 –2 +7 +5.

Rileggi pag. 12 del primo fascicolo. Nella prossima pagina scoprirai che un segno meno davanti ad una parentesi corrisponde a moltiplicare per –1 il contenuto di quella parentesi.

MOLTIPLICAZIONE

Abbiamo detto che vogliamo mantenere invariate tutte le proprietà delle operazioni. Siccome zero è l'elemento nullo della moltiplicazione, se moltiplichiamo un numero negativo per zero esso diventa zero. Il numero 1 è l'elemento neutro, pertanto se moltiplichiamo un numero negativo per 1 esso rimane invariato.
Moltiplicare per un numero naturale maggiore di 1 significa sommare tante volte l'altro fattore.

$$4 \cdot 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

$$-6 \cdot 5 = (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) = -30$$

Siccome noi vogliamo che continui a valere la proprietà commutativa deve essere anche

$$5 \cdot (-6) = -30$$

Il valore assoluto del prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti. Il segno è positivo se entrambi i fattori sono positivi. Il segno è negativo se i fattori sono discordi. Se moltiplichiamo un numero positivo per –1 otteniamo un numero negativo con lo stesso valore assoluto: $5 \cdot (-1) = -5$ perché

$$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -5$$

Visto che il prodotto di due numeri positivi è positivo, il prodotto di due numeri negativi dovrebbe essere negativo? In realtà ciò non basterebbe per rendere le regole simmetriche. Infatti la moltiplicazione per –1 cambierebbe il segno dei numeri positivi ma non cambierebbe quello dei negativi, mentre la moltiplicazione per +1 non lo cambierebbe mai. Per mantenere la simmetria delle moltiplicazioni per +1 e –1, la regola dovrebbe essere: se moltiplichiamo un numero qualsiasi per +1 esso rimane invariato, se lo moltiplichiamo per –1 esso cambia di segno. Quale delle due regole adottare? Il prossimo esempio ci fornirà la risposta:

$$-2 \cdot [5 + (-5)] = -2 \cdot 0 = 0$$

Abbiamo detto che devono valere tutte le proprietà che già conosciamo, quindi anche quella distributiva. Applichiamola:

$$-2 \cdot [5 + (-5)] = (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot (-5) =$$
$$= -10 + (-2) \cdot (-5) = 0$$

Ora esaminiamo le due possibilità. Se fosse $(-2) \cdot (-5) = -10$ il risultato diventerebbe –20. Ciò sarebbe assurdo, perché il risultato non deve cambiare quando applichiamo una proprietà. Se invece $(-2) \cdot (-5)$ facesse +10 allora i conti tornerebbero. Pertanto la <u>convenzione</u> è che **il prodotto di due numeri concordi è positivo**; **il prodotto di due numeri discordi è negativo**.

Se gli alunni di una classe si sistemano in modo che i compagni di banco abbiano lo stesso sesso, al massimo ne possono rimanere due, un maschio ed una femmina, costretti a sedersi assieme. Questo accade solo quando sia il numero dei maschi che quello delle femmine sono dispari. Riesci ad immaginare una classe in cui rimangano più di due alunni spaiati? È impossibile!
Come esistono alunni di soli due sessi, così esistono numeri di soli due segni. Se devi moltiplicare più di due numeri, immagina di accoppiare quelli con lo stesso segno. Indichiamo i positivi con una p ed i negativi con una n.

$$(p_1 \cdot p_2) \cdot (p_3 \cdot p_4) \cdot \ldots \cdot (n_1 \cdot n_2) \cdot (n_3 \cdot n_4) \cdot \ldots$$

Il prodotto di ogni coppia è positivo perché le coppie sono formate da numeri concordi. Anche il prodotto di tutte le coppie sarà positivo. Se rimane un numero positivo spaiato, moltiplica il prodotto già calcolato anche per l'ultimo numero positivo. Il nuovo prodotto intermedio sarà anch'esso positivo. A questo punto, se i numeri negativi di partenza erano pari abbiamo già finito ed il prodotto totale è positivo. Se invece i numeri negativi erano dispari ne sarà rimasto ancora uno ed il totale sarà negativo:

$$\text{prodotto} = (\text{intermedio positivo}) \cdot n_{spaiato} < 0$$

D'ora in poi o ripeteremo l'intero ragionamento o applicheremo la seguente regola: **il prodotto è negativo se e solo se il numero di fattori negativi è dispari**.

$-1^0 = 1$ per la regola dell'esponente 0
$-1^1 = -1$ per la regola dell'esponente 1
$-1^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$
$-1^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
$-1^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$

Il segno della potenza di un numero negativo dipende dall'esponente: **se l'esponente è dispari la potenza è negativa**; **se l'esponente è pari la potenza è positiva**. Tutte le potenze con esponente 0 valgono +1, tranne 0^0 che non ha significato. Tutte le potenze con esponente 1 valgono quanto la base. Attenzione alle regole di precedenza:

$$-5^2 = -(5^2) = -25$$
$$(-5)^2 = +25$$

DIVISIONE

Due numeri si dicono uno l'inverso dell'altro se il loro prodotto è +1. L'inverso di $-1,\overline{3}$ è –0,75 perché $(-1,\overline{3}) \cdot (-0,75) = +1$. Solo lo zero non possiede un inverso. Qualsiasi altro numero è concorde col proprio inverso. **Invertire un numero significa dividere 1 per quel numero**.

Di solito si sostituisce la divisione con la moltiplicazione per l'inverso del divisore. Il vantaggio è che la moltiplicazione gode delle proprietà commutativa ed associativa.

$$9 : -\frac{3}{4} = 9 \cdot -\frac{4}{3} = -12$$

Questo esempio dimostra che la regola dei segni della divisione è la stessa di quella della moltiplicazione; ciò resta vero anche quando non ricorriamo al concetto di numero inverso.

$$(-15) : (-5) = 3$$
$$(-28) : 4 = -7$$
$$33 : (-11) = -3$$

ESPONENTI NEGATIVI

Quanto fa $5^2 : 5^6$? Applicando la regola della divisione fra potenze con la stessa base fa 5^{-4}. L'esponente è negativo. Ma i numeri negativi non li avevamo introdotti per eseguire le sottrazioni? Che cosa c'entrano le divisioni? Non avevamo detto che, con i numeri razionali, le divisioni sono sempre possibili? Proviamo a sostituire i due punti con la linea di frazione.

$$5^2 : 5^6 = \frac{5^2}{5^6} = \frac{\cancel{5^2}}{\cancel{5^2} \cdot 5^4} = \frac{1}{5^4}$$

Tutto sommato, la notazione 5^{-4} è più compatta e possiamo usarla per indicare la stessa quantità. Prendiamo un caso più semplice.

$$7^{-1} = 7^0 : 7^1 = 1 : 7 = \frac{1}{7}$$

Elevare un numero alla –1 equivale ad invertire quel numero. Siccome una espressione non è altro che un numero scritto in maniera più complicata, **elevare una espressione alla –1 significa dividere 1 per quella espressione**. Quando l'esponente è minore di –1 il ragionamento è analogo.

$$7^{-3} = 7^0 : 7^3 = 1 : 7^3 = \frac{1}{7^3}$$

Esiste una via alternativa che conduce allo stesso risultato. Prima si scompone $-3 = 3 \cdot -1$ e poi si applicano la regola di potenza di potenza e la regola dell'esponente –1.

$$7^{-3} = 7^{(3 \cdot -1)} = (7^3)^{-1} = \frac{1}{7^3}$$

D'ora in poi non eseguiremo tutti i passaggi. Applicheremo la regola: **una potenza con esponente negativo è la frazione reciproca della stessa potenza con l'esponente positivo**. Qualche esempio un poco più complesso:

$$\frac{7^{-3}}{5^{-3}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^{3} = \frac{5^3}{7^3}$$
$$1^{-35} = 1$$
$$\frac{1}{2^{-10}} = 2^{10}$$
$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = +\frac{1}{9}$$
$$-3^{-2} = -(3^{-2}) = -\frac{1}{9}$$

Il raffronto fra gli ultimi due esempi ti aiuta a comprendere l'importanza delle parentesi.

ESPRESSIONI LETTERALI

È spesso necessario descrivere una serie di operazioni senza conoscere le quantità in gioco. Ad esempio: "L'area di un triangolo è uguale alla base per l'altezza diviso 2". Anziché dirlo a parole, scriviamolo in simboli matematici, in modo che la nostra idea sia leggibile non solo in Italia ma in tutto il mondo e che sia scritta in una forma più compatta:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Il segno di moltiplicazione fra due lettere è facoltativo. Una lettera all'interno di una espressione indica un generico numero relativo e sottintende non soltanto il valore assoluto ma anche il segno. Ad esempio, la relazione

$$a < 0$$

ci dice che a è un numero negativo. Il segno – non appare perché è già compreso dentro la lettera a.

Un'espressione letterale può contenere molte lettere: $a^2 - 2ab + b^2$. Se assegniamo due valori ai simboli a e b possiamo calcolare il corrispondente valore dell'espressione. Se cambiano i valori di a e b cambia anche quello dell'espressione. Alcune sostituzioni fanno perdere significato all'espressione e vanno evitate. $\frac{2a+1}{5-a}$ Se assegniamo ad a il valore 5 il denominatore diventa 5–5 = 0 e l'espressione perde significato. La lettera a può assumere qualsiasi altro valore, positivo o negativo.

MONOMI

Una espressione letterale si chiama monomio se le lettere sono coinvolte solo in moltiplicazioni.

Se una lettera è moltiplicata per se stessa viene scritta sotto forma di potenza.

Di solito si tratta di espressioni molto brevi. All'interno del monomio ci possono essere un solo numero scritto in cifre, chiamato **coefficiente**, e molti numeri scritti come lettere, chiamati parte letterale. Il coefficiente può contenere il segno algebrico + o –, può trovarsi sotto radice, avere un esponente, anche negativo, e può contenere la linea di frazione.

$$4^7 ab^2 ; \quad -\frac{1}{4} c ; \quad -\sqrt{5}\, a^2 b ; \quad +3^{-3} b c^3 ;$$

Per chiarezza si scrive il coefficiente all'inizio, seguito dalle lettere in ordine alfabetico. Nell'ultimo esempio il coefficiente è $+3^{-3}$ e la parte letterale bc^3. La parte letterale di un monomio contiene solo lettere ed esponenti interi non negativi; non contiene segni, linee di frazione o simboli di altre operazioni.

Si definisce **grado** di un monomio la somma degli esponenti delle sue lettere. Se non ci sono lettere il grado è zero. Il numero 0 è chiamato monomio nullo e fa caso a sé: non ha grado.

Se due monomi hanno la stessa parte letterale si dicono **simili**. Se anche il coefficiente è lo stesso sono uguali. Due monomi simili con coefficienti opposti si dicono monomi opposti.

Quando si sommano o sottraggono monomi simili si eseguono i calcoli solo sui coefficienti e si ricopia la parte letterale.

$$5a^2b - 3a^2b = 2a^2b$$

Quando si incontra una somma algebrica fra monomi non simili si lascia l'espressione così come è, perché non è possibile semplificarla.

$$-3a^2b + c$$

Nei prossimi anni imparerai qualche trucco per semplificare espressioni contenenti somme di monomi non simili. Ogni trucco si riferisce ad un caso particolare. Non esiste nessun trucco per semplificare l'espressione precedente.

MOLTIPLICAZIONE FRA MONOMI

Questa operazione è sempre possibile ed il risultato è un altro monomio. Si moltiplicano fra di loro i coefficienti. Se una lettera è presente in un solo fattore la si ricopia col proprio esponente. Se la lettera è ripetuta in più di un fattore, l'esponente con cui apparirà nel prodotto sarà la somma degli esponenti contenuti nei fattori.

$$-3\, ac \cdot \frac{1}{4} ab^2 = -\frac{3}{4} a^2 b^2 c$$

DIVISIONE FRA MONOMI

È possibile solo se tutte le lettere del divisore appaiono nel dividendo con un esponente uguale o maggiore. Il quoziente è un monomio.

$$-a^2 b c^3 \ : \ \frac{1}{7} b c^2 \quad = \quad -7 a^2 c$$

POLINOMI

Un'espressione si chiama polinomio se è una somma algebrica di monomi, detti termini del polinomio. Polinomi con due o tre termini hanno nomi specifici: binomio e trinomio. Abbiamo visto che è possibile sommare i monomi simili. Quindi di solito supponiamo che i termini simili siano già stati sommati fra di loro. Un polinomio del genere, ossia privo di termini simili, si dice ridotto.
Il grado di un polinomio è pari al grado più alto dei suoi monomi.

ADDIZIONE FRA POLINOMI

Il polinomio somma contiene i termini di entrambi gli addendi. Se due o più termini sono simili si sommano fra loro.
$(-a -b) + (a^2+2a) – (-4a^2-3a+b) =$
$= -a -b +a^2 +2a +4a^2 +3a -b = 4a +5a^2 -2b.$

MOLTIPLICAZIONE

Per imparare useremo polinomi molto semplici (ogni monomio conterrà una sola lettera e non ci saranno né segni meno né esponenti). Come primo esempio moltiplichiamo un trinomio per un monomio.

$$(a + b + c) \cdot m = am + bm + cm.$$

È bastato applicare la proprietà distributiva.
Più complicata la moltiplicazione per un binomio: $(a + b + c) \cdot (f + g)$. Qui possiamo vedere uno dei vantaggi delle espressioni letterali: siamo liberi di definire quali e quanti simboli vogliamo. Definiamo p il binomio.

$$p = f + g$$

Rispetto alla lettera p questo è un monomio! La moltiplicazione diventa:

$$(a + b + c) \cdot p = ap + bp + cp.$$

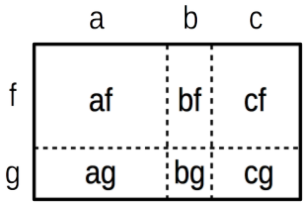
A questo punto sostituiamo la p con (f + g). Abbiamo tre moltiplicazioni fra un binomio ed un monomio.

$$ap + bp + cp =$$
$$= a \cdot (f + g) + b \cdot (f + g) + c \cdot (f + g) =$$
$$= af + ag + bf + bg + cf + cg.$$

Il prodotto contiene 6 termini. 6 è il prodotto di $3 \cdot 2$. Non è un caso. Infatti nel secondo passaggio abbiamo distribuito ogni termine del trinomio ad ogni termine del binomio. Ognuno dei sei termini finali è il prodotto fra un termine del trinomio ed un termine del binomio. Abbiamo realizzato tutte le combinazioni possibili, come si può vedere da questa tabella.

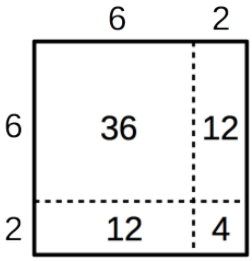
	a	**b**	**c**
f	af	bf	cf
g	ag	bg	cg

Ancora più interessante la rappresentazione grafica. Se ogni polinomio rappresenta un lato di un rettangolo, l'area è uguale al prodotto dei lati. Il prodotto di due polinomi è un polinomio. I suoi termini si ottengono moltiplicando ogni termine di un fattore per ogni termine dell'altro.



PRODOTTI NOTEVOLI

I prossimi esempi conviene impararli a memoria perché sono molto frequenti.
Quadrato di un binomio: contiene i quadrati dei monomi ed il doppio del loro prodotto.
$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$
$= a^2 + 2ab+ b^2.$
Da dove salta fuori il doppio prodotto? La figura illustra il caso $(6+2) \cdot (6+2)$
I quadrati di lati 6 e 2 non bastano a riempire il quadrato di lato 8. I due rettangoli che mancano corrispondono ai prodotti $2 \cdot 6 = 12$ e $6 \cdot 2 = 12$.



$$8 \cdot 8 = 36 + 4 + 2 \cdot 12 = 64$$

I quadrati sono sempre positivi. Il doppio prodotto è positivo se a e b sono concordi, negativo se sono discordi.

$$(2x – 3y)^2 = 4x^2 – 12xy + 9y^2$$

Prodotto di somma e differenza degli stessi monomi
$(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – ab + ab – b^2 = a^2 – b^2.$

Cubo del binomio
$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) =$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2+ ab^2 + b^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

EQUAZIONI E IDENTITÀ

Abbiamo appena visto alcune eguaglianze fra due espressioni, come

$$(x + 2) \cdot (x – 2) = x^2 – 4$$

Qualunque valore sostituiamo alla x, le due espressioni saranno uguali. Uguaglianze di questo tipo si chiamano identità.
Nel seguente esempio:

$$(x + 5) \cdot (x – 2) = 0$$

L'eguaglianza è vera quando x = – 5 o quando x = 2 ed è falsa quando x assume qualsiasi altro valore. Una eguaglianza di questo tipo prende il nome di equazione.
A volte si incontrano equazioni impossibili:

$$x^2 = –9$$

è falsa perché tutti i quadrati sono positivi.
A cosa servono le equazioni? A risolvere dei problemi. Difatti il numero che, sostituito alla x, rende vera l'equazione si chiama **soluzione**. La x è detta **incognita** che significa "sconosciuta". È come quando sali su un treno e chiedi se un posto è libero o occupato. Capita che ti rispondano: "È occupato da una signora che torna subito". Tu ti raffiguri una donna nella mente e gli potresti anche assegnare il nome "signora X". A volte si materializza, a volte no.
Di solito si usano le lettere x, y e z per indicare le incognite e le lettere a, b, c, ecc. negli altri casi (ad es. nelle formule).
Ognuna delle due espressioni, separate dal segno =, si chiama **membro**. Ogni monomio che compare, anche se privo di lettere, si chiama **termine**. Il termine che non comprende l'incognita si chiama **termine noto**. Se un termine contiene l'incognita moltiplicata per un altro numero, questo numero si chiama **coefficiente** dell'equazione. Il massimo esponente con cui compare l'incognita si chiama **grado** dell'equazione.

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Due equazioni si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. Il procedimento per trovare le soluzioni è quello di trasformare l'equazione di partenza in una più semplice ma equivalente.

Un accorgimento per sembrare più alti è quello portare delle scarpe con i tacchi. Cosa accadrebbe se, in un paio di scarpe, i due tacchi non fossero alti uguali? Chi le calza camminerebbe storto. Il calzaturificio non ha bisogno di sapere quanto sono lunghe le gambe di chi comprerà un paio di scarpe. È ovvio che, aggiungendo due tacchi uguali a due gambe uguali, le gambe resteranno uguali mentre, aggiungendoli a due gambe diverse, una più lunga dell'altra, le gambe resteranno diverse.
Si fa lo stesso anche con le equazioni.
Primo Principio – Aggiungiamo o sottraiamo la stessa quantità ai due membri: otteniamo una equazione equivalente a quella di partenza.

$$x + 4 = 10$$

Vogliamo che alla sinistra rimanga la sola incognita. Bisognerebbe togliere il 4. Per non alterare la soluzione dell'equazione dobbiamo togliere un 4 anche dal membro di destra.

$$x + 4 – 4 = 10 – 4$$

Se eseguiamo i calcoli l'equazione diventa:

$$x = 6$$

che fornisce direttamente la soluzione.

Ci sono due regole che discendono direttamente dal primo principio e ci consentono di saltare un passaggio.
1) Se un monomio appare in entrambi i membri si può cancellare.

$$x + 3ab^2 = 3ab^2 + 11$$
$$x = 11$$

2) Possiamo far passare un monomio da un membro all'altro, cambiandone il segno.

$$x – 7 = 13$$
$$x = 13 + 7$$
$$x = 20$$

Se abbiamo pagato €1,50 una confezione di 12 colori, quanto abbiamo pagato ciascun colore? Scriviamo il problema sotto forma di equazione.

$$12\,x = €\,1{,}50$$

Per risolverlo dividiamo per 12 entrambi i membri.

$$12\,x : 12 = €\,1{,}50 : 12$$
$$x = €\,0{,}125$$

Se invece vogliamo sapere quanto costano 24 colori moltiplichiamo per 2 entrambi i membri dell'equazione di partenza.

$$12\,x \cdot 2 = €\,1{,}50 \cdot 2$$
$$24\,x = €\,3$$

Secondo Principio – Moltiplicando o dividendo entrambi i membri per la stessa quantità, diversa da zero, si ottiene una equazione equivalente.
Vale la pena di ricordare alcune conseguenze.
3) Possiamo cambiare il segno a tutti i termini (è come se moltiplicassimo tutto per –1).
4) Se tutti i termini sono frazioni con lo stesso denominatore possiamo scrivere una equazione equivalente con i soli numeratori (è come se moltiplicassimo per il denominatore).
5) Se entrambi i membri sono dei monomi possiamo spostare il coefficiente di un monomio al denominatore dell'altro.

$$5x = 3$$

Qui dividiamo entrambi i membri per 5.

$$x = \frac{3}{5}$$

TRANELLI

Potresti credere, a questo punto, che se applichiamo la stessa operazione ad entrambi i membri si ottiene sempre una equazione equivalente. Non è vero!

$$x = -3$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri.

$$x^2 = 9$$

L'ultima equazione ha due soluzioni: +3 e –3. Ma +3 non è una soluzione dell'equazione di partenza!
È possibile moltiplicare tutto per una espressione letterale, come "a" oppure "2a–b", ma solo se siamo certi che l'espressione sia diversa da 0. Moltiplicando per 0 si avrebbe:

$$x \cdot 0 = -3 \cdot 0$$
$$0 = 0$$

che è una identità.

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Per risolvere un'equazione di primo grado in una incognita con coefficienti interi:
1) Sposta tutti i termini contenenti la x alla sinistra del segno = e tutti i termini senza la x alla destra. Ricordati che, ogni volta che un termine passa dall'altra parte, bisogna cambiargli il segno.
2) Somma tutti i termini simili. Ne devono rimanere uno per parte. L'equazione si dice ridotta in forma normale. Es.: 5x = 3.
3) Se il coefficiente della x è diverso da zero, spostalo al denominatore del secondo membro.
4) Una volta ottenuta la soluzione, per maggior sicurezza, puoi sostituire, nell'equazione di partenza, il simbolo x con la soluzione appena trovata. Deve venir fuori una identità.

Per risolvere un'equazione con coefficienti frazionari:
1) Riduci al minimo comun denominatore tutti i termini, anche quelli non frazionari.
2) Fai sparire i denominatori. Rimane una equazione con coefficienti interi.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -2x - \frac{1}{3}$$
$$\frac{3x+9}{6} = \frac{-12x-2}{6}$$
$$3x + 9 = -12x - 2$$
$$3x + 12x = -2 - 9$$
$$15x = -11$$

la soluzione è $x = -\frac{11}{15}$ verifichiamola:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{11}{15}\right) + \frac{3}{2} = -2 \cdot \left(-\frac{11}{15}\right) - \frac{1}{3}$$
$$-\frac{11}{30} + \frac{3}{2} = \frac{22}{15} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{45-11}{30} = \frac{22-5}{15}$$
$$\frac{34}{30} = \frac{17}{15}$$
$$\frac{17}{15} = \frac{17}{15}$$

DISCUSSIONE

Abbiamo detto cosa fare nel passaggio 3) quando il coefficiente della x è diverso da zero. Cosa succede quando invece è zero?

1° caso: Anche il termine noto è zero.

$$0 \cdot x = 0$$

Questa è una identità. La x è **indeterminata**, ossia può assumere qualsiasi valore.

2° caso: Il termine noto è diverso da zero. Non esistono soluzioni. L'equazione si dice **impossibile**. Ad esempio:

$$0 \cdot x = 13$$

Nessun numero, moltiplicato per 0, diventa 13.

GEOMETRIA ANALITICA

Il piano cartesiano è un semplice accorgimento che fonde l'algebra con la geometria. Quando un problema è troppo difficile da risolvere con l'algebra lo si può risolvere con la geometria e viceversa. Un altro grande vantaggio è che permette di rappresentare graficamente sia le equazioni che le funzioni. In questo modo un colpo d'occhio è sufficiente per comprendere le caratteristiche dell'equazione. Per quanto riguarda le funzioni, rileggi le pagine 14 e 15 del secondo fascicolo.

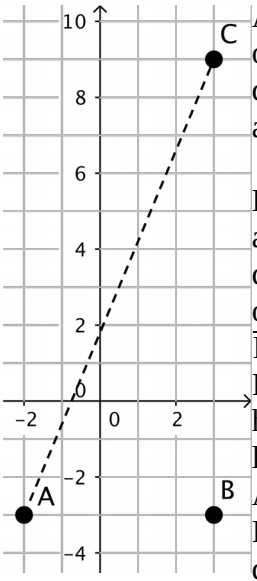
Nel piano cartesiano ci sono due rette orientate e graduate, perpendicolari fra di loro, che si chiamano assi. L'asse orizzontale si chiama asse delle ascisse o asse x. Quello verticale si chiama asse delle ordinate o asse y. Il punto O in cui si incontrano si chiama origine. Ogni punto del piano ha un indirizzo composto da due numeri: l'ascissa, distanza dall'origine alla sua proiezione sull'asse x, e l'ordinata, distanza dall'origine alla sua proiezione sull'asse y. Per convenzione si riportano sempre in questo ordine. Ad esempio P(3;–1) significa che il punto P ha ascissa 3 ed ordinata –1.È anche possibile associare ad una coppia di valori un punto del piano. Ad esempio, una mamma, per controllare la crescita di un neonato, lo pesa ogni giorno e riporta le pesate su un grafico. Per far corrispondere un punto ad ogni pesata, si assegna l'ascissa uguale alla data e l'ordinata uguale al peso. Per evidenziare l'andamento si collegano poi i punti con dei segmenti o con una curva. Prova a farlo tu con questi dati.

giorno	Kg
1	4,383
2	4,351
3	4,515

Disegnare nel piano una equazione in due variabili x e y significa disegnare gli infiniti punti P le cui coordinate x_P e y_P soddisfano l'equazione.

Oggi è facile fare della geometria analitica grazie a tanto software di qualità. Ti consiglio di ripetere tutti gli esempi che troverai su di un computer o un tablet usando Geogebra:
https://www.geogebra.org/b/RzGuvSgN

DISTANZA FRA DUE PUNTI



A e B hanno la stessa ordinata. La distanza $\overline{AB}$ è data dalla differenza delle ascisse, in valore assoluto:

$\overline{AB} = |x_A - x_B| = 3 - (-2) = 5$

B e C hanno la stessa ascissa. La distanza $\overline{BC}$ è data dalla differenza delle ordinate, in valore assoluto:

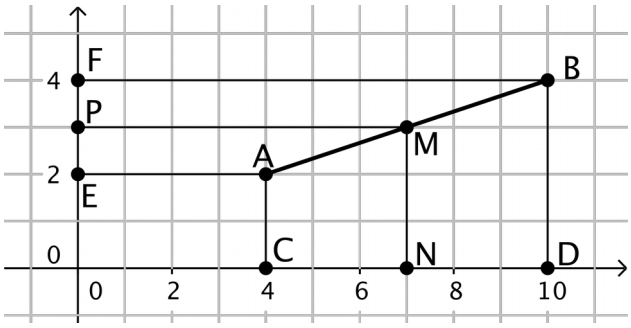
$\overline{BC} = |y_B - y_C| = 9 - (-3) = 12$

In generale due punti non hanno né la stessa ascissa né la stessa ordinata. La coppia AC ne è un esempio.

In tal caso si usa il teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo ABC.

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO



Se M è il punto medio del segmento AB allora $\overline{AM} = \overline{BM}$. Possiamo applicare il teorema di Talete al fascio di rette parallele verticali (AC, MN, BD) tagliato dalla due trasversali AB e CD. $\overline{CN} = \overline{DN}$. $\overline{CN} = x_M - x_A$. $\overline{DN} = x_B - x_M$. Possiamo scrivere l'equazione

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

la cui soluzione è $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

Con lo stesso metodo, applicato al fascio di rette parallele FB, PM ed EA tagliato dalle trasversali AB e EF, si trova $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Le coordinate del punto medio di un segmento sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi.

RETTA

Osserva questa equazione: y = 2 x
Detta a parole: la y è il doppio della x. Assegnato un valore qualsiasi alla x, corrisponderà un unico valore per la y. Questa è la condizione per fare di una regola una funzione. Quindi la y è funzione della x. Puoi mettere in tabella i valori di y che corrispondono a x=0, x=1, x=2, x=3, ecc. e disegnare un grafico, sul quaderno o con Geogebra. La forma grafica dell'equazione è una retta che passa per l'origine. Dal grafico si nota che ad ogni valore di y corrisponde un unico valore della x. In casi del genere si dice che la funzione è invertibile.
Passiamo all'equazione y = ½ x. Detta a parole: la y è la metà della x. Anche questa è una retta ed anch'essa passa per l'origine, ma è meno inclinata. Il coefficiente davanti alla x (prima era 2, ora ½) misura la **pendenza** della retta, ossia di quanto cresce la y quando la x aumenta di una unità. La pendenza può anche essere negativa. Prova a disegnare y=–2x e y=–½ x. In questo casi, quando la x aumenta la y diminuisce. Il coefficiente della x si chiama anche **coefficiente angolare** perché, in un modo molto particolare, misura l'angolo fra la retta e l'asse delle ascisse. Quando l'angolo diventa zero l'equazione diventa y = 0. Per quali punti vale questa equazione? Per tutti i punti con ordinata zero. È l'equazione che descrive l'asse x. L'asse y è invece descritto dall'equazione x = 0, perché tutti i punti con ascissa nulla si trovano lungo l'asse y e viceversa.
Modifichiamo leggermente l'equazione y = 2 x.

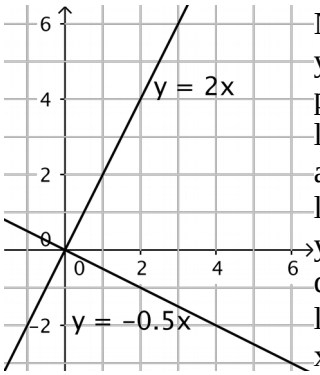
y = 2x + 1

Tutti i valori della y sono spostati verso l'alto di una unità. La retta è parallela a quella di prima. Pertanto due rette con la stessa pendenza sono parallele. Se sostituiamo x=0 otteniamo y=1. La retta non passa più dall'origine ma dal punto (0;1). Il termine noto dell'equazione corrisponde all'ordinata del punto di intersezione fra la retta e l'asse y. Per brevità questo termine si chiama intercetta.
Siccome una qualsiasi retta avrà una pendenza ed una intercetta, l'**equazione generale**

y = m x + q

descrive tutte le rette.

Una retta orizzontale, y = q, ha pendenza zero e descrive una funzione, in quanto ad ogni valore della x corrisponde un solo valore della y, ma tale funzione non è invertibile. Una retta verticale, x = k, ha pendenza infinita e non descrive una funzione, in quanto ad un singolo valore di x corrispondono infiniti valori della y.



Nota che le rette y=2x e y = - ½ x sono perpendicolari fra di loro. Nel primo caso, aumentando di una unità la x, aumenta di due la y. Nel secondo caso, diminuendo di una unità la y, aumenta di due la x. I coefficienti angolari di due rette perpendicolari sono uno positivo e l'altro negativo. I loro valori assoluti sono uno l'inverso dell'altro. Un'unica condizione sintetizza le precedenti: **due rette sono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari è – 1**.
Sappiamo che per due punti passa una sola retta. Quindi deve essere possibile scrivere l'equazione di una retta se conosciamo le coordinate di due dei suoi punti. Chiamiamoli $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Questa volta le x e le y non indicano delle incognite, ma dei valori numerici già noti. x è solo l'abbreviazione di ascissa. La pendenza della retta misura la velocità di variazione della y:

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \quad \text{oppure} \quad m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

Dopo aver calcolato m, risolviamo l'equazione considerando che l'incognita è la q.

$q = y_A - m\,x_A$ oppure $q = y_B - m\,x_B$

Chiariamo con un esempio. Qual è la retta che passa dai punti A(1;-1) e B(5;2) ?

$$m=\frac{2-(-1)}{5-1}=\frac{3}{4}$$

Adesso riscriviamo la formula di q usando l'ascissa di A ($x_A = 1$) al posto della x e la sua ordinata ($y_A = -1$) al posto della y.

$$q=y_A-m\,x_A=-1-\frac{3}{4}\cdot 1=-\frac{7}{4}$$

L'equazione della retta è $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$

CONICHE

Le equazioni di secondo grado corrispondono a curve interessanti e molto frequenti nei più svariati settori. Le indispensabili **figure** relative a questo paragrafo le trovi, in maniera dinamica, alla pagina
https://www.geogebra.org/m/ZbBFp3BH

Fra poco troverai delle lettere minuscole a, b, k, r… Di solito questi valori appaiono nelle formule generali mentre nei casi pratici sono sostituiti da numeri. Si chiamano parametri dell'equazione. Le lettere x e y indicano invece le coordinate dei punti della curva. Se appaiono in una equazione sono le incognite. Se appaiono in una funzione sono le variabili: la x è la variabile indipendente e la y la variabile dipendente.

Cosa hanno in comune i punti di una circonferenza? La loro distanza dal centro. Facciamo coincidere il centro della circonferenza con l'origine degli assi ed usiamo la formula della distanza fra due punti. Il raggio, cioè la distanza di un punto della circonferenza P(x,y) dal centro O è:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ora vediamo una piccola differenza fra l'algebra e la geometria. Di solito non si potrebbero elevare al quadrato i due membri. Il raggio non può essere negativo, non avrebbe senso. Posta la condizione $r \geq 0$ è possibile elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione che diventa:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$$

Questa è l'**equazione della circonferenza**. Non è una funzione, perché ad ogni valore della x ne corrispondono due della y.
La orbite dei pianeti sono descritte da una **ellisse**, la cui equazione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Anche questa equazione non può rappresentare una funzione. a e b sono due parametri che cambiano da una ellisse all'altra. Quanto più a è diversa da b tanto più l'ellisse è stretta e lunga. Se a = b l'equazione si semplifica e diventa quella della circonferenza di raggio a.
Se lanci un oggetto in alto (ma non in verticale) esso descrive una parabola. Il punto più alto della traiettoria si chiama vertice. Se facciamo coincidere l'origine degli assi con il vertice, la **parabola** è descritta dall'equazione $\mathbf{y = k\,x^2}$.
Nel caso appena descritto k è negativo, il vertice è il punto più alto e la concavità della parabola è rivolta verso il basso. Se $k > 0$ accade tutto il contrario.
La parabola è una funzione, ma non è invertibile perché ad un valore della y corrispondono due valori della x. Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. In termini matematici $f(-x) = f(x)$, cioè se invertiamo il segno della x la funzione non cambia valore.
L'ultima curva che esaminiamo è l'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Matematicamente è troppo difficile per noi. Un suo sottoinsieme è costituito dalle **iperboli equilatere** $y = \frac{k}{x}$
Quest'ultima è una funzione invertibile ma non è definita quando x = 0. La curva è composta da due parti staccate chiamate rami. La funzione è simmetrica rispetto all'origine. In termini matematici $f(-x) = -f(x)$, cioè se invertiamo il segno della x allora anche la funzione cambia di segno ma mantiene lo stesso valore assoluto.
Tanto più grande è la x tanto più la y si avvicina a zero. Nelle sue parti più lontane dall'origine l'iperbole quasi coincide con gli assi. Quando, come in questo caso, una curva si avvicina indefinitamente ad una retta senza mai toccarla, si dice che la retta è un asintoto della curva.
Molte leggi di natura sono descritte graficamente da un'iperbole equilatera. Infatti tutte le grandezze inversamente proporzionali sono legate dalla questa equazione con $k > 0$. Un ramo dell'iperbole occupa il quadrante in alto a destra del piano. L'altro ramo occupa il quadrante opposto ma di solito viene ignorato, perché le grandezze fisiche normalmente assumono valori positivi.
Quando $k < 0$ l'iperbole equilatera occupa gli altri due quadranti.
Tutte le curve che abbiamo visto possono essere ottenute come sezioni di una speciale figura solida, il "cono infinito". Per tale motivo si chiamano sezioni coniche o, semplicemente, coniche. Trovi un'ottima spiegazione in un video in lingua inglese:
https://youtu.be/HO2zAU3Eppo

INTERSEZIONE DI DUE RETTE

Risolviamo un caso concreto. Le equazioni delle due rette sono:

$$y = 3x - 5 \qquad y = -x + 11$$

Supponiamo che si incontrino in un punto P di coordinate x_P e y_P. Per questa coppia di valori devono essere soddisfatte entrambe le equazioni.

$$y_P = 3\,x_P - 5 \qquad y_P = -\,x_P + 11$$

Eguagliamo fra di loro i membri di destra:

$$3\,x_P - 5 = -\,x_P + 11$$

Questa è una equazione di primo grado ad una incognita la cui soluzione è $x_P = 4$. Abbiamo trovato l'ascissa. Sostituiamo questo valore in una qualsiasi delle equazioni delle rette.

$$y_P = 3 \cdot 4 - 5 = 7$$

Questo metodo è generale e possiamo usarlo anche per trovare l'intersezione fra una retta ed una conica. In tal caso le intersezioni potrebbero essere due. Non c'è nulla di strano se due rette o due curve non hanno alcun punto di intersezione. Osserva queste due rette:

$$y = 3x - 5 \qquad y = 3x + 1$$

Uguagliando i secondi membri si ottiene qualcosa di impossibile: $-5 = 1$. Perchè? Semplicemente le due rette sono parallele (infatti hanno lo stesso coefficiente angolare) pertanto non si incontrano mai.

SIMBOLI LOGICI

P e Q indicano due proposizioni semplici, ossia affermazioni che sono o vere o false. Ad esempio: "oggi è lunedì" oppure: "tutti i pappagalli sono verdi".

$P \Rightarrow Q$ conseguenza logica

$Q = \neg P$ negazione: Q è vera se P è falsa e viceversa Q è falsa se P è vera.

$R = P \wedge Q$ congiunzione "e": forma una nuova proposizione R che è vera solo se entrambe le proposizioni P e Q sono vere.

$S = P \vee Q$ congiunzione "o": forma una nuova proposizione S che è falsa solo se entrambe le proposizioni P e Q sono false.

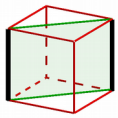
$\forall$ "per ogni" (quantificatore universale)

$\exists$ "esiste" (quantificatore esistenziale)

$\nexists$ "non esiste"

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Se in questo momento ti trovi in una stanza, osserva gli spigoli delle pareti. Di solito ce ne sono dodici: quattro verticali ed otto orizzontali. Due spigoli paralleli fra di loro, anche se non hanno pareti in comune, si trovano sullo stesso piano. Infatti due rette parallele individuano uno ed un solo piano. Prendi ad esempio due spigoli verticali che si trovino in due angoli opposti della stanza. Puoi immaginare di stendere una tenda che attraversi tutta la stanza in diagonale, come mostrato nella figura. Quindi due rette si trovano in uno stesso piano in due casi: se si incontrano in un punto o se sono parallele. Dal punto di vista geometrico non importa se questo piano sia concreto o immaginario.



Di solito due rette nello spazio non si incontrano. Pensa a due aerei che volino in linea retta, ad altezze diverse ed in direzioni diverse. Anche se le loro rotte si incrociano sulla carta geografica, nella realtà gli aerei non si scontrano proprio perché viaggiano ad altezze diverse. Due rette che non si incontrano pur non essendo parallele si chiamano **sghembe**. Esercitati ad individuare, nella tua stanza, coppie di rette sghembe, ossia spigoli non paralleli che non si incontrerebbero mai neppure se prolungati all'infinito. Basta prenderne uno verticale ed uno orizzontale che non appartengano alla stessa parete. Non è l'unico caso.

Due piani o sono paralleli oppure si incontrano. Se si incontrano hanno in comune una retta, detta spigolo, che divide ognuno dei due piani in due semipiani. Due semipiani con l'origine in comune dividono lo spazio in due parti dette angoli diedri. I due semipiani si chiamano facce del diedro. Due piani si dicono perpendicolari se formano quattro angoli diedri retti. Una retta e un piano che non hanno punti in comune si dicono paralleli. Se hanno un solo punto in comune si dicono incidenti. Una retta si dice perpendicolare ad un piano se ha un punto in comune e se è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano da quel punto. Se un piano è perpendicolare allo spigolo di un diedro, le sue intersezioni con le due facce del diedro sono due semirette. L'angolo compreso fra le due semirette misura l'ampiezza dell'angolo diedro.

π

Osserva questa animazione:
https://www.geogebra.org/m/ng2CFf89
Tutte le circonferenze sono simili fra di loro; il rapporto fra lunghezza della circonferenza e lunghezza del diametro è un numero costante. Nel 1761 Lambert dimostrò che questo numero è irrazionale. È universalmente indicato col simbolo π e le sue prime cifre sono:
3,14159265358979323846264338327950 28…
Forse sei curioso di sapere come sono state calcolate. In una prima fase, fra '700 ed '800, i matematici dimostrarono alcune formule infinite in cui appariva il numero π. Una delle più semplici è:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$$

Ogni nuovo termine della somma algebrica ha un valore assoluto inferiore ai precedenti. I termini molto a destra possono pertanto venire trascurati. In tempi più recenti i calcolatori hanno consentito di risolvere formule come questa inglobando milioni di termini. I centri di ricerca hanno fatto a gara a chi trovasse più cifre. Ne sono state calcolate più di mille miliardi ma non ne vengono usate più di 25.
https://it.wikipedia.org/wiki/Pi_greco

Osserva queste animazioni:
https://www.geogebra.org/m/JfRZWp6a
https://www.geogebra.org/m/M2VJwZhG
L'area del cerchio è maggiore di quella dei poligoni regolari inscritti e minore di quella dei poligoni regolari circoscritti. Man mano che il numero dei lati aumenta, i poligoni assomigliano sempre più al cerchio, fino a diventare indistinguibili. Si può migliorare tale approssimazione quanto si vuole perchè il numero dei lati può crescere indefinitamente. Semplificando diremmo che il cerchio è quel poligono regolare con un numero infinito di lati.
Se P indica il perimetro ed a l'apotema, la formula dell'area del poligono è $A_{poligono} = ½ P a$.
L'area del cerchio, approssimata per difetto, è uguale a quella di un poligono inscritto con un numero altissimo di lati: $A_{cerchio} > ½ P_{inscritto} a$.
Approssimata per eccesso, l'area è uguale a quella di un poligono circoscritto con un numero altissimo di lati: $A_{cerchio} < ½ P_{circoscritto} r$.
Questa volta abbiamo usato il simbolo r perché l'apotema del poligono circoscritto è uguale al raggio. Ma anche l'apotema del poligono inscritto, aumentando i lati, si avvicina ad r, mentre $P_{inscritto}$ e $P_{circoscritto}$ si avvicinano entrambi alla circonferenza 2πr. Al crescere del numero dei lati, sia l'area del poligono inscritto che quella del poligono circoscritto si avvicinano a

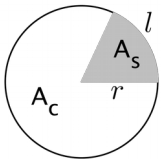
$$½ (2\pi r) r = \pi r^2$$

Ma non avevamo detto che si avvicinano all'area del cerchio? Deve essere, allora:

$$\mathbf{A_{cerchio} = \pi r^2}$$

All'interno di una stessa circonferenza, la lunghezza di un arco è proporzionale al suo angolo al centro. L'intera circonferenza può essere considerata un arco con angolo al centro di 360°. Possiamo pertanto scrivere la proporzione **l : C = α : 360°** in cui l è la lunghezza di un arco, α il suo angolo al centro e C la lunghezza della circonferenza.
Possiamo scrivere un'altra proporzione con le aree dei settori circolari.

$$\mathbf{A_{settore} : A_{cerchio} = \alpha : 360°}$$



Il rapporto l : C vale α:360° quanto il rapporto fra le aree. Possiamo scrivere una nuova proporzione:

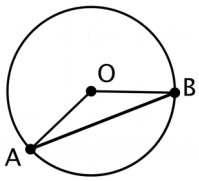
$$A_{settore} : A_{cerchio} = l : C$$

la quale, una volta risolta, ci fornisce una nuova formula.

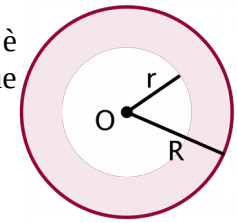
$$\mathbf{A_{settore}} = l \cdot A_{cerchio} : C = l \cdot \pi r^2 : (2 \pi r) = \mathbf{½\, l\, r}$$

Nota la somiglianza con la formula dell'area del triangolo. $A_{settore} = \frac{1}{2} l\, r$

La corda AB divide il cerchio in due segmenti.



L'area del segmento circolare che non contiene il centro è la differenza fra quella del piccolo settore AOB e quella del triangolo isoscele ABO.
L'area del segmento circolare che comprende il centro è la somma di quella del grande settore BOA e quella del triangolo isoscele.



L'area di una corona circolare è la differenza fra le aree di due cerchi.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\mathbf{A = \pi (R^2 - r^2)}$$

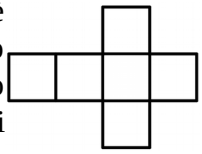
POLIEDRI

Si chiama poliedro qualsiasi figura solida completamente delimitata da poligoni, dette facce del poliedro, mentre i lati dei poligoni vengono detti spigoli. Ogni spigolo salda assieme due facce. Ad esempio, se una faccia ha 4 lati sarà saldata con altre 4 facce, se ha 5 lati sarà saldata con 5 facce, ecc.
Un poliedro si dice convesso se, rispetto al piano individuato da una sua faccia, esso si trova da una sola parte. Si dice concavo se viene attraversato anche da un solo prolungamento di una sua faccia. Per i poliedri convessi vale una regola scoperta da **Eulero**:

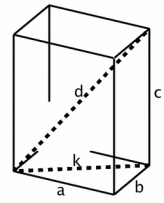
n. di facce + n. di vertici = n. di spigoli + 2

Eulero naque a Basilea, in Svizzera, nel 1707 e fu uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

È sempre possibile sviluppare un prisma in un piano, cioè riportare in un unico piano tutte le sue facce, ognuna delle quali legata con solo una parte delle facce cui era legata nel solido. Dallo **sviluppo** risulta più facile il calcolo delle aree. L'esempio più semplice è quello del cubo, altrimenti detto esaedro regolare. Questo è il suo sviluppo. Le facce sono sei quadrati congruenti.



Il **prisma** è un poliedro delimitato da due facce congruenti e parallele, dette basi, collegate da tanti parallelogrammi quanti sono i lati delle basi. Le due basi possono essere dei poligoni qualsiasi. Se le facce laterali sono dei rettangoli il prisma è detto retto. Un prisma è detto regolare quando è retto e le sue basi sono dei poligoni regolari.
Un **parallelepipedo** è un prisma in cui anche le basi sono dei parallelogrammi. Ha sei facce e quattro diagonali. Se le facce laterali sono dei rettangoli viene detto parallelepipedo retto. Se tutte e sei le facce sono rettangolari si dice parallelepipedo rettangolo; ne vediamo un esempio nella prossima figura.



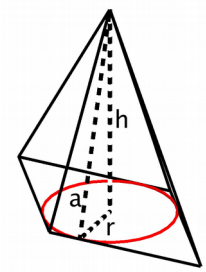
Tre spigoli uscenti dallo stesso vertice prendono il nome di dimensioni. Possiamo usare le lettere a e b per indicare le misure della base, c per l'altezza e k per la diagonale della base. Possiamo calcolare k^2 col teorema di Pitagora: $k^2 = a^2 + b^2$.
Nel parallelepipedo rettangolo le quattro diagonali sono congruenti e si incontrano in un unico punto, che le taglia tutte a metà. La diagonale d è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui i cateti misurano k e c.

$$d^2 = k^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Estraendo la radice: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Il cubo è un parallelepipedo rettangolo con tutti i lati congruenti: a = b = c = l. $d^2 = 3\,l^2$. $d = \sqrt{3}\,l$ La diagonale del cubo si ottiene moltiplicando il lato per la radice di 3.
Come è ben noto, l'unità di misura del volume è il metro cubo, ossia il cubo in cui tutti gli spigoli sono lunghi 1 m. Se gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo sono lunghi un numero intero di metri; se, cioè, le misure a, b e c viste in figura, espresse in metri, corrispondono a numeri interi, allora è possibile sistemare, all'interno del solido, un numero di metri cubi pari al prodotto a · b · c. Possiamo allora ripetere lo stesso ragionamento fatto nel caso dell'area del rettangolo (pag. 19 del secondo fascicolo). Questo prodotto è uguale al volume anche quando le misure dei lati sono numeri reali. Quindi, in generale

$$\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$$

La **piramide** è un poliedro in cui tutti i vertici, tranne uno, fanno parte della stessa faccia, detta base. Le altre facce, dette laterali, sono dei triangoli. In ognuno di questi triangoli un lato coincide con un spigolo della base. Il vertice che non appartiene alla base, detto semplicemente vertice della piramide, appartiene invece a tutte le facce laterali. L'altezza è la distanza del vertice dal piano che contiene la base.



La piramide si dice **retta** se nella sua base si può iscrivere una circonferenza e se il centro della circonferenza è anche il piede dell'altezza della piramide. In questo caso tutte le facce laterali hanno la stessa altezza, detta apotema.

$$\mathbf{a^2 = h^2 + r^2}$$

La piramide si dice regolare se è retta e se ha per base un poligono regolare.
È possibile classificare le piramidi anche in base al numero di lati della base.

POLIEDRI REGOLARI

Un poliedro si dice regolare se:
- le sue facce sono poligoni regolari congruenti;
- in ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce;
- gli angoli diedri formati da facce adiacenti sono congruenti.

Un poliedro regolare che ti è sicuramente familiare è il cubo. Esso ha sei facce, otto vertici e dodici spigoli. Da cosa sono determinati questi numeri? Soltanto dal numero di lati del poligono (n = 4) e dal numero di facce che convergono in ogni spigolo (m = 3). Infatti, se separiamo le 6 facce, ognuna di essa ha 4 vertici. In totale 4·6=24 vertici. Quando però riuniamo le facce i vertici si saldano tre alla volta. Quindi la formula del numero dei vertici è 4 · 6 : 3 ossia

$$V = n\,F : m$$

dove F è il numero delle facce.

Quando le facce sono separate, i lati dei quadrati sono anch'essi 4·6=24. Quando riuniamo le facce, coppie di lati si saldano a formare uno spigolo. Quindi la formula degli spigoli è

$$S = n\,F : 2$$

Ti ricordi la formula di Eulero?

$$F + V - S = 2$$

Sostituiamo V ed S con le espressioni che abbiamo appena trovato. Ne vien fuori una equazione dove l'incognita è F.

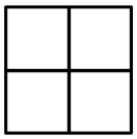
$$F + \frac{n}{m} F - \frac{n}{2} F = 2$$

$$\left(1 + \frac{n}{m} - \frac{n}{2}\right) F = 2$$

$$\frac{2m + 2n - mn}{2m} F = 2$$

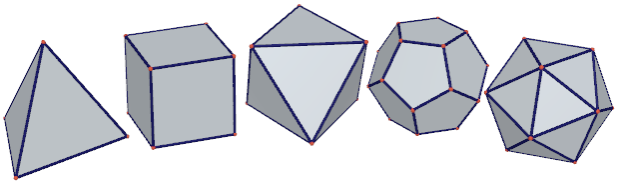
$$F = \frac{4m}{2m + 2n - mn}$$

Con queste tre formule, conoscendo il numero di lati del poligono regolare ed il numero di facce che convergono in ogni vertice possiamo predire quante facce, spigoli e vertici avrà il poliedro regolare. Il valore minimo per m è 3: riesci ad immaginare un vertice con meno di tre facce? Questo è proprio il valore che abbiamo osservato nel cubo. È possibile costruire un poliedro in cui in ogni vertice convergano quattro quadrati? Disegniamo lo sviluppo di questi quattro quadrati soltanto.



Non essendovi spazio libero fra i quadrati non riusciamo più a piegare lo sviluppo ed a chiuderlo per formare un solido! Nei veri sviluppi ci sono sempre spazi vuoti. Puoi verificare, prendendo un vertice qualsiasi di un poliedro qualsiasi e sommando gli angoli piani che partono da quel vertice, che la somma è sempre minore di un angolo giro. A causa di questa condizione, è possibile costruire appena cinque poliedri regolari. Se le facce sono dei triangoli equilateri (con angoli di 60°) il valore di m può essere 3, 4 o 5. Non può essere 6 perché la somma di 6 angoli di 60° sarebbe 360°. Se le facce sono quadrate (angoli di 90°) o pentagonali (angoli di 108°) m può avere il valore 3 ma non di più. Gli angoli di un esagono regolare misurano 120°. Con tre di questi angoli già arriviamo a 360°. Se aumentiamo il numero di lati gli angoli diventano ancora più ampi. Non è possibile costruire poliedri regolari con poligoni di sei o più lati.

I nomi dei cinque solidi iniziano con una radice greca che indica il numero di facce.



Tetraedro. Ha quattro facce triangolari, quattro vertici e sei spigoli. In ogni vertice convergono tre facce.

Cubo o Esaedro. Ha sei facce quadrate, otto vertici e dodici spigoli. In ogni vertice convergono tre facce.

Ottaedro. Ha otto facce triangolari, sei vertici e dodici spigoli. In ogni vertice convergono quattro facce.

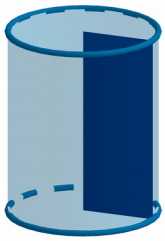
Dodecaedro. Ha dodici facce pentagonali, venti vertici e trenta spigoli. In ogni vertice convergono tre facce.

Icosaedro. Ha venti facce triangolari, dodici vertici e trenta spigoli. In ogni vertice convergono cinque facce.

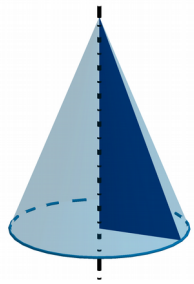
Verifica le tue conoscenze attraverso questo quiz: https://www.geogebra.org/m/ag6ghxqu

Puoi approfondire l'argomento su wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Solido_platonico

SOLIDI DI ROTAZIONE

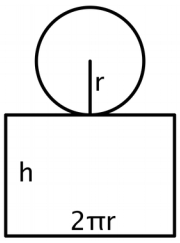


Se prendiamo una figura piana e la facciamo ruotare essa coprirà lo spazio attorno a sé. L'esempio più consueto è quello di una porta che ruota attorno ai suoi cardini. Se una porta ruota di 360° si chiama porta girevole. Se una figura piana gira di 360° spazza un volume che corrisponde ad una figura solida. Ad esempio, ruotando un rettangolo attorno ad un suo lato e facendogli fare un giro completo esso descrive un cilindro, che ha due basi circolari parallele. La distanza fra le basi si chiama altezza.

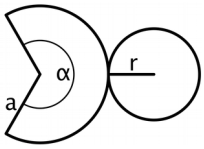


Ruotando un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto si genera un cono. Esso ha una base ed un vertice. Il cateto attorno al quale avviene la rotazione è l'altezza del cono. L'altro cateto è il raggio della base. L'ipotenusa si chiama apotema del cono.

Ruotando un semicerchio attorno ad un suo diametro si produce una sfera.



Le superfici di cilindro e cono possono essere sviluppate su di un piano e pertanto è facile calcolarne l'area. La superficie laterale del cilindro diventa un rettangolo che ha la stessa altezza del cilindro e la cui base è lunga quanto la circonferenza di base.



La superficie laterale del cono diventa un settore circolare il cui raggio è lungo quanto l'apotema e il cui arco è lungo quanto la circonferenza di base. Sappiamo che per l'angolo al centro vale la proporzione

$$\alpha : 360° = l : C$$

Sostituendo l e C con le loro formule diventa:

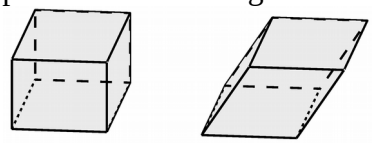
$$\alpha : 360° = 2\pi r : 2\pi a = r : a$$

la cui soluzione è $\alpha = \frac{r}{a} 360°$

La superficie della sfera non è sviluppabile in piano. Pertanto non è possibile riprodurre la superficie della Terra in una cartina geografica, a meno di distorcere la forma e le proporzioni dei continenti.

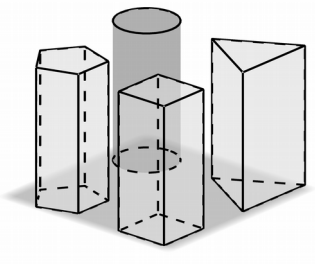
PRINCIPIO DI CAVALIERI

L'intersezione fra un solido ed un piano è una figura piana e prende il nome di sezione del solido. Gli oggetti che ci circondano hanno tutti tre dimensioni, per cui una figura piana è una astrazione. Un foglio di carta, se si trascura il suo spessore, è un'ottima approssimazione di un rettangolo. Una risma di carta, se ben impilata, ha la forma di un parallelepipedo rettangolo. Un singolo foglio è una sua sezione. Se i fogli slittano si verifica la situazione raffigurata nella parte destra della figura.



Il parallelepipedo non è più retto. La sua superficie è aumentata. Il volume occupato dalla carta invece non è cambiato, si è solo disteso un pochino nello spazio. Le singole sezioni (i fogli) del solido di destra hanno la stessa area di quelle del solido di sinistra. Anche se i due solidi sono diversi, i loro volumi sono gli stessi.

Se ciò non basta a convincerti, ricordati che peso e volume sono direttamente proporzionali. Il loro rapporto si chiama peso specifico. Far slittare un foglio sull'altro non ha alcun effetto sul peso. Se il peso non cambia allora non è cambiato neppure il volume.



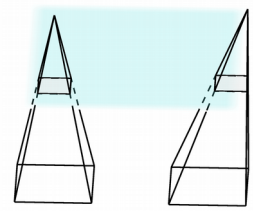
Immagina ora di costruire fogli di forme diverse, ma area e spessore uguale. Queste quattro risme, avendo la stessa altezza, saranno composte dallo stesso numero di fogli e quindi avranno lo stesso volume. I quattro solidi della figura non hanno le stesse superfici ma hanno lo stesso volume.

Un grande matematico italiano del '600, Bonaventura Cavalieri, dimostrò che, se due solidi hanno la stessa altezza e se tutte le coppie di sezioni prese alle stesse distanze dalla base sono equivalenti, allora i solidi hanno lo stesso volume. Non contano nulla né la forma della base, né il numero dei suoi lati né il fatto che il solido sia retto o inclinato, regolare o irregolare. Come vedi, c'è una vasta gamma di solidi equivalenti ai parallelepipedi e questo fatto si

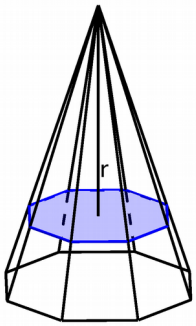
sfrutta per il calcolo dei volumi. Si può usare la stessa formula dei parallelepipedi

$$\mathbf{V = A_{base} \cdot h}$$

per tutti i prismi ed i cilindri, anche se inclinati.
Le sezioni che abbiamo visto finora erano tutte congruenti con le basi dei rispettivi solidi, ma il principio di Cavalieri è ancor più generale. Possiamo applicarlo anche alle piramidi.



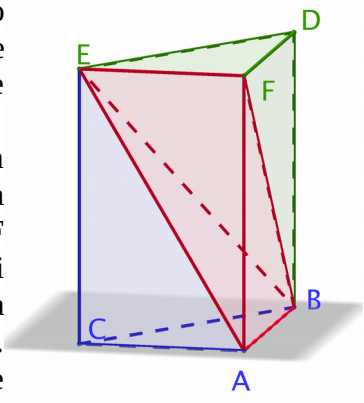
Se le due basi sono congruenti, anche le sezioni devono esserlo fra loro, se prese alla stessa distanza dalla base.
Per dimostrarlo ricaviamo la formula che ci fornisce l'area di ogni sezione di una piramide qualsiasi, come questa ottagonale. La sezione colorata è la base di una piramide più piccola di altezza r. Le due piramidi ottagonali sono simili perché hanno angoli congruenti, quindi il rapporto fra le aree è il quadrato del rapporto fra le lunghezze. Se indichiamo con B l'area di base e con S quella della sezione, abbiamo:



S : B = $(r : h)^2$ da cui calcoliamo la formula

$$S = B\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

Questa formula vale per qualsiasi piramide ed anche per i coni. Se tutti i termini sulla destra (area di base B, altezza h del solido principale e distanza r della sezione dal vertice) sono uguali, allora sono uguali anche le aree delle sezioni. Possono cambiare la forma della base e l'inclinazione del solido, ma questi due fattori non entrano nella formula perciò non hanno alcun effetto sulla superficie della sezione.
Se prendiamo due piramidi qualsiasi che abbiano la stessa area di base e la stessa altezza, le sezioni dell'una saranno equivalenti alle sezioni dell'altra e noi potremo applicare il principio di Cavalieri. Anche se una delle due piramidi fosse un cono il discorso non muterebbe. A questo punto non ci resta che trovare la formula del volume per una sola piramide e poi, come abbiamo fatto con quella del parallelepipedo, la potremo estendere a tutte la altre piramidi nonché ai coni.

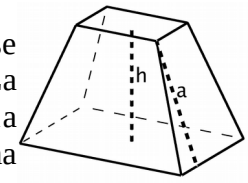


Qui a fianco abbiamo tre piramidi a base triangolare.
La piramide con base ABF e quella con base BDF hanno le basi congruenti e la stessa altezza EF. Quindi queste due piramidi hanno lo stesso volume. Le piramidi con base AFE e ECA hanno basi congruenti e la stessa altezza AB. Le piramidi con basi ABC e DEF hanno basi congruenti e la stessa altezza CE = DB. Le tre piramidi formano un prisma che ha la stessa base e la stessa altezza. Siccome le tre piramidi hanno lo stesso volume, ognuna di esse occupa la terza parte del volume del prisma. In conclusione, il volume di una piramide è la terza parte di quello di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

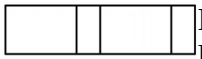
$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$

Siccome qualsiasi altra piramide o cono avente la stessa base e la altezza, per il principio di Cavalieri, avrà lo stesso volume di una piramide trigonale, questa formula è valida per tutte le piramidi ed anche per i coni.
https://www.geogebra.org/m/at5wsPYk
https://www.geogebra.org/m/Y9T8SsX9
https://www.geogebra.org/m/VBUVMzKj
Nella nostra dimostrazione ci siamo presi la libertà di trascurare lo spessore della carta quando volevamo che un foglio di carta rappresentasse una sezione. Quando, però, si è trattato di calcolare il peso ed il volume della carta, allora ci ha fatto comodo restituire ad ogni foglio il proprio peso ed il proprio spessore.
La nostra non si può considerare una dimostrazione rigorosa, ma soltanto intuitiva. A volte in matematica una dimostrazione rigorosa è talmente lunga e complicata che in pochi la conoscono o la ricordano. Quello che conta è essere coscienti dell'esatta portata di un teorema, con tutte le sue sfumature e sottigliezze e con i suoi limiti di applicabilità.

SOLIDI TRONCHI



Un piano parallelo alla base taglia in due una piramide. La parte inferiore si chiama tronco di piramide. Esso ha due basi parallele. La distanza fra le basi si chiama altezza mentre l'altezza delle facce laterali si chiama apotema. Queste facce laterali sono dei trapezi. L'area di una di esse è data dalla formula $a \cdot \frac{B+b}{2}$ dove B e b sono le basi del trapezio. La parte frazionaria è anche la formula della media aritmetica. Infatti qualsiasi trapezio è equivalente ad un rettangolo con la stessa altezza e la cui base sia la media delle basi del trapezio. Se disegniamo uno accanto all'altro i rettangoli corrispondenti a tutte le facce laterali otteniamo una striscia anche essa rettangolare.

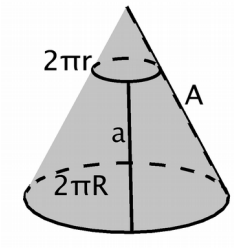


L'area di questa striscia è l'area laterale del tronco di piramide. L'altezza della striscia è uguale all'apotema. La base della striscia è la somma delle medie delle basi. Poche manipolazioni algebriche ci consentono di dire che questa somma è uguale alla media dei perimetri.

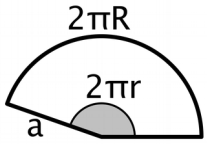
$$\frac{B_1+b_1}{2}+\frac{B_2+b_2}{2}+\frac{B_3+b_3}{2}+\frac{B_4+b_4}{2}$$

$$\frac{(B_1+B_2+B_3+B_4)+(b_1+b_2+b_3+b_4)}{2}=\frac{P+P'}{2}$$

L'area laterale del tronco di piramide è il prodotto dell'apotema per la media dei perimetri delle due basi. $A_L = a \cdot \frac{P+P'}{2}$



Analogamente si definiscono il tronco di cono, la sua altezza ed il suo apotema. Nella figura abbiamo chiamato **R** il raggio della circonferenza della base inferiore ed **r** quello della base superiore; **A** l'apotema del cono e **a** quello del tronco. Abbiamo disegnato anche lo sviluppo della faccia laterale del cono e del tronco.

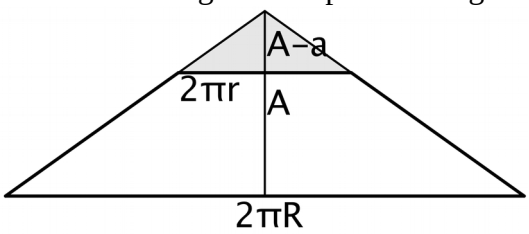


A : (A–a) = 2πR : 2πr A

$A_{grigia} + A_{bianca} = \pi R A$

$A_{grigia} = \pi r (A - a)$

Le aree calcolate qui sopra corrispondono a quelle dei due triangoli della prossima figura.



Questi triangoli rispettano anche la proporzione; ciò è essenziale perché ci assicura che il disegno è corretto.

La parte che vogliamo calcolare è quella bianca, ossia l'area laterale del tronco di cono, il cui simbolo sarà A_L. Utilizziamo la formula dell'area del trapezio. L'altezza del trapezio è uguale all'apotema a.

$A_L = a (2\pi R + 2\pi r) : 2$

Semplificando otteniamo la formula:

$$\mathbf{A_L = \pi a (R + r)}$$

Esiste anche una dimostrazione più complessa, puramente algebrica.

$A_L = (A_{grigia}+A_{bianca}) - A_{grigia} = \pi R A - \pi r (A - a)$

$A_L = \pi \{R A - r A + ra\}$

Applicando la regola dello scomporre alla proporzione otteniamo una nuova proporzione che risolviamo rispetto ad A.

A : (A–a) = R : r

[A – (A–a)] : A = (R – r) : R

a : A = (R – r) : R

$$A = \frac{a R}{R-r}$$

Sostituiremo A con quest'ultima espressione.

$$A_L = \pi \{R A - r A + r a\}$$

$$A_L = \pi \left\{ R \frac{a R}{R-r} - r \frac{a R}{R-r} + r a \right\}$$

$$A_L = \pi \left\{ \frac{a R^2}{R-r} - \frac{a r R}{R-r} + \frac{r a (R-r)}{R-r} \right\}$$

$$A_L = \pi \frac{a R^2 - a r R + a r R - a r^2}{R-r}$$

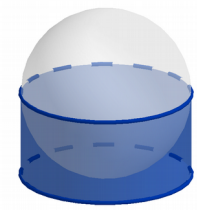
$$A_L = \pi \frac{a R^2 - a r^2}{R-r}$$

$$A_L = \pi a \frac{R^2 - r^2}{R-r}$$

$$A_L = \pi a \frac{(R+r)(R-r)}{R-r}$$

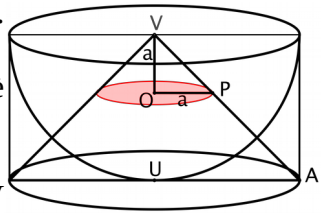
$$A_L = \pi a (R+r)$$

SFERA



Il solido scuro e concavo in questa figura è chiamato scodella di Galilei. Nella parte inferiore ha la forma di un cilindro in cui l'altezza è uguale al raggio r. La cavità superiore ha la forma di una semisfera. Il raggio della semisfera è uguale a quello del cilindro. Nella figura abbiamo riempito la cavità con una sfera chiara.

Il volume della scodella, per il principio di Cavalieri, è uguale a quello di un cono avente la stessa base e la stessa altezza. Per dimostrarlo calcoliamo le aree delle sezioni di entrambi i solidi, prese alla stessa distanza **a** dalla base superiore del cilindro.

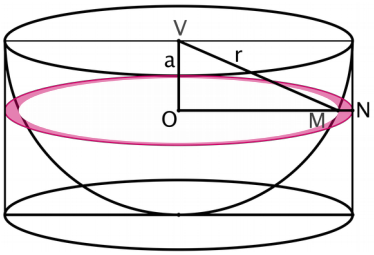


Iniziamo dal cono.

Il triangolo UAV è isoscele perché

$$\overline{UV} = \overline{UA} = r$$

Anche il triangolo OPV è isoscele, quindi il raggio della sezione del cono è uguale ad a. L'area della sezione è πa^2.



Passiamo alla scodella. $\overline{VM} = r$ perché è il raggio della semisfera. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo VOM.

$$\overline{OM}^2 = r^2 - a^2$$

L'area della corona è:

$$\pi\,\overline{ON}^2 - \pi\,\overline{OM}^2 = \pi r^2 - \pi (r^2 - a^2) = \pi a^2$$

Quindi le aree delle sezioni sono uguali. Il volume della scodella è uguale a quello del cono, il quale è a sua volta un terzo di quello del cilindro.

$$V_{CILINDRO} = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$$

$$V_{SCODELLA} = V_{CILINDRO} : 3$$

I rimanenti due terzi corrispondono alla cavità semisferica.

$$V_{SEMISFERA} = V_{CILINDRO} \cdot 2 : 3 = 2 \cdot \pi r^3 : 3$$

Il volume della sfera è il doppio di quello della semisfera.

$$V_{SFERA} = 2\, V_{SEMISFERA} = 4 \cdot \pi r^3 : 3$$

La formula del volume della sfera è

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Nel caso della circonferenza vedemmo che gli archi sono proporzionali ai rispettivi settori. Per esempio, ad un angolo al centro di 90° corrisponde un arco che è la quarta parte della circonferenza e un settore che è un quarto del cerchio. Intuitivamente possiamo estendere questa proporzionalità alle tre dimensioni. Verifichiamolo.

Supponiamo che la Terra sia perfettamente sferica. Sai che la superficie terrestre è divisa in 24 fusi orari. Ad ogni fuso corrisponde uno spicchio. La sfera terrestre è così divisa, in modo immaginario, in 24 fusi congruenti e 24 spicchi congruenti. Ogni fuso è un ventiquattresimo della superficie della sfera ed ogni spicchio è un ventiquattresimo del volume.

$$V_{SPICCHIO} : V_{SFERA} = S_{FUSO} : S_{SFERA}$$

Tale proporzione rimane valida anche se prendiamo uno spicchio più grande o più piccolo o se tagliamo tutti i fusi e gli spicchi a metà con un piano che passa dall'equatore.

Spingendoci più in là, intuitivamente, la proporzione è valida per qualsiasi angoloide che parta dal centro della sfera, cioè una specie di piramide. Si tratta di una piramide particolare con base curva sulla superficie della sfera e vertice al centro.

$$V_{PIRAMIDE} : V_{SFERA} = S_{BASE} : S_{SFERA}$$

Permutiamo gli estremi.

$$S_{SFERA} : V_{SFERA} = S_{BASE} : V_{PIRAMIDE}$$

Tale rapporto è costante qualunque sia la larghezza della base. Quando la piramide è estremamente aguzza ad essa corrisponderà una superficie di base minuscola. Anche se la superficie terrestre è curva, è lecito considerarla piatta per distanze inferiori al km. Noi siamo liberi, con l'immaginazione, di scendere anche sotto il picometro! In tal caso la base è piatta e la piramide è una normale piramide di altezza r.

$$V_{PIRAMIDE} = r\, S_{BASE} : 3$$

Adesso possiamo calcolare il rapporto

$$S_{BASE} : V_{PIRAMIDE} = S_{BASE} : (r\, S_{BASE} : 3) = 3 : r$$

$$S_{SFERA} : V_{SFERA} = S_{BASE} : V_{PIRAMIDE} = 3 : r$$

Risolviamo rispetto all'incognita S_{SFERA}.

$$S_{SFERA} = 3\, V_{SFERA} : r$$

Sostituiamo a V_{SFERA} la sua formula.

$$S_{sfera} = \frac{3}{r} V_{sfera} = \frac{\cancel{3}}{r} \frac{4}{\cancel{3}} \pi r^3 = 4 \pi r^2$$

Abbiamo ricavato la formula della superficie.

$$\mathbf{S = 4 \pi r^2}$$